Zadania z MNRP — seria 7
30.04.2015

1. 10 chłopców i 10 dziewcząt ustawia się losowo w kolejce. Przez X oznaczmy pozycję w kolejce dziewczyny, która jest najbliżej początku kolejki. Wyznacz rozkład zmiennej losowej X.

2. Kij złamano w losowym miejscu. Niech X oznacza stosunek długości krótszej do dłuższej części. Wyznacz rozkład zmiennej losowej X.

3. Na arkuszu kartki w kratkę w przypadkowym miejscu postawiono kropkę. Niech X oznacza odległość kropki do najbliższej linii (poziomej lub pionowej). Wyznacz rozkład X oraz $\mathbb{E}X$.

4. Liczby $1, 2, \ldots, 100$ ustawiono w losowej kolejności tworząc ciąg $(a_1, a_2, \ldots, a_{100})$. Niech N będzie największą liczbą taką, że $a_1 < a_2 < \ldots < a_N$. Znajdź rozkład i wartość oczekiwaną zmiennej losowej N.

5. Potasowano n kartek ponumerowanych liczbami od 1 do n, po czym jedną z kartek odłożono na bok. Następnie zdejmowano ze stosu kolejne kartki, aż natrafiono na taką, której numer przewyższał numer kartki odłożonej na początku na bok. Niech X oznacza liczbę kartek, które pozostały na stosie. Znajdź rozkład i oblicz wartość oczekiwaną oraz wariancję X.

6. W loterii jest a losów wygrywających i b przegrywających. Ciągniemy (bez zwracania!) n losów ($1 \leqslant n \leqslant a + b$). Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję liczby wyciągniętych losów wygrywających.

7. n listów włożono na chybił-trafił do n zaadresowanych kopert, po jednym liście do każdej koperty. Niech X oznacza liczbę listów, które trafiły do właściwych kopert. Oblicz $\mathbb{E}X$ oraz $\mathrm{Var}X$.

8. Wybieramy losowo *niepusty* podzbiór zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ (wybór każdego z $2^n - 1$ podzbiorów jest jednakowo prawdopodobny). Niech X oznacza moc wylosowanego podzbioru. Oblicz $\mathbb{E}X$.

9. W grupie liczącej n osób, przez X oznaczmy liczbę par osób, które obchodzą urodziny tego samego dnia. (Jeśli jakaś trójka osób obchodzi urodziny tego samego dnia, to daje to 3 pary.) Zakładając, że żadna z osób nie obchodzi urodzin 29 lutego, oblicz $\mathbb{E}X$ oraz $\mathrm{Var}X$.

10. Każdy bok i każdą przekątną sześciokąta foremnego pomalowano losowo na jeden z trzech kolorów, przy czym wybór każdego koloru jest jednakowo prawdopodobny i kolorowania różnych odcinków są niezależne. Niech X oznacza liczbę jednokolorowych trójkątów o wierzchołkach będących wierzchołkami sześciokąta. Oblicz $\mathbb{E}X$.

11. Rzucamy kostką do momentu, aż tę samą liczbę oczek wyrzucimy dwa razy z rzędu. Wyznacz rozkład liczby wykonanych rzutów i oblicz jego średnią i wariancję.

12. Rzucamy kostką do gry do momentu wypadnięcia wszystkich możliwych liczb oczek. Oblicz wartość oczekiwaną liczby wykonanych rzutów.