Zadania z MNRP — seria 5
9.04.2015

1. W urnie znajdują się trzy prawidłowe kostki oraz jedna fałszywa, z samymi szóstkami. Losujemy kostkę, następnie wykonujemy nią rzut.
   (a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że wypadnie sześć oczek?
   (b) Załóżmy, że wypadło sześć oczek. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowano fałszywą kostkę?
   (c) Załóżmy, że wypadło sześć oczek. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ponownie rzucając tą kostką, wyrzucimy sześć oczek?
2. Dwaj strzelcy X oraz Y oddają strzały do tarczy. Przed każdym strzałem rzucają symetryczną monetą: jeśli wypadnie orzeł, strzela X; w przeciwnym razie, strzela Y. Strzelec X trafia w tarczę z prawdopodobieństwem 0,7, strzelec Y trafia z prawdopodobieństwem 0,8. Oddano dwa strzały. Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że dwa razy strzelał strzelec X oraz cel został trafiony dokładnie raz.
3. W populacji jest 15% dyslektyków. Jeśli w teście diagnostycznym uczeń popełni 6 lub więcej błędów, to zostaje uznany za dyslektyka. Każdy dyslektyk na pewno popełni co najmniej 6 błędów w takim teście, ale również nie-dyslektyk może popełnić więcej niż 5 błędów — dzieje się tak z prawdopodobieństwem 0,1. Jasio popełnił w teście 6 błędów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest dyslektykiem? Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w kolejnym teście też popełni co najmniej 6 błędów?
4. Partia pewnego towaru składa się z n sztuk. Prawdopodobieństwo tego, że dokładnie k sztuk jest wybrakowanych wynosi p_k, $k = 0, 1, ..., n$. Losujemy jedną sztukę i okazuje się, że jest wadliwa. Jaka jest szansa, że w partii jest k braków?
5. Talię kart podzielono na dwie połowy, lewą i prawą. Wylosowano kartę z lewej połowy: okazało się, że jest ona asem. Następnie przełożono kartę do prawej połowy, otrzymane 27 kart przetasowano i wyciągnięto jedną kartę. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że ta karta jest asem?
6. Wybrano losowo podzbiory A, B zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ (każdy wybór podzbioru jest tak samo prawdopodobny).
   (a) Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że $A \subseteq B$.
   (b) Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że $A \cap B = \emptyset$.
7. Rzucamy dwa razy kostką. Rozważmy zdarzenia: A — za pierwszym razem wypadła liczba oczek podzielna przez 3; B — suma wyrzuconych oczek jest parzysta; C — za drugim razem liczba oczek jest parzysta. Czy zdarzenia A, B, C są niezależne parami? Czy są niezależne zespołowo?
8. Na n kartonikach zapisano n różnych liczb rzeczywistych. Kartoniki włożono do pudełka, starannie wymieszano, a następnie losowano kolejno bez zwracania. Niech A_k oznacza, że k-ta wylosowana liczba jest większa od poprzednich.
   (a) Udowodnić, że $\mathbb{P}(A_k) = 1/k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.
   (b) Udowodnić, że zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są niezależne.
9. Liczby $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ ustawiono losowo w ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$. Zbadać niezależność zdarzeń $\{a_1 < a_2\}, \{a_3 < a_4\}, \ldots, \{a_{2n-1} < a_{2n}\}$.
10. Rzucono trzy razy kostką. Niech A oznacza zdarzenie „suma oczek wynosi 8". Czy istnieje zdarzenie B na naturalnej przestrzeni probabilistycznej, niebędące zbiorem pustym i całym zbiorem Ω, niezależne od zdarzenia A?