Zadania z MNRP — seria 3
12.03.2015

1. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, zaś $A, B, C \in \mathcal{F}$.

   (a) Załóżmy, że $\mathbb{P}(A \cup B) = 1/2$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/4$, $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(B \setminus A)$. Oblicz $\mathbb{P}(A)$ oraz $\mathbb{P}(B \setminus A)$.

   (b) Załóżmy, że $A \cup B \cup C = \Omega$, $\mathbb{P}(B) = 2\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(C) = 3\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C)$. Wykaż, że $1/6 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1/4$.

   (c) Załóżmy, że $\mathbb{P}(A) \geqslant 2/3$, $\mathbb{P}(B) \geqslant 2/3$, $\mathbb{P}(C) \geqslant 2/3$, $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$. Oblicz $\mathbb{P}(A)$.

2. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pierwsza i ostatnia karta w potasowanej talii to asy?

3. Klasa liczy 20 uczniów. Nauczyciel wybiera na każdej lekcji na chybił trafił jednego ucznia do odpowiedzi. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w ciągu 21 lekcji każdy uczeń będzie przepytany.

4. Mamy pęk n kluczy, z których tylko jeden otwiera drzwi. Próbujemy otworzyć drzwi na chybił-trafił. Jakie jest prawdopodobieństwo, że otworzymy drzwi w k-tej próbie, jeśli

   (a) odkładamy klucze, o których stwierdziliśmy, że nie otwierają drzwi?

   (b) za każdym razem używamy losowo jednego z n kluczy?

5. Rozdano 52 karty czterem graczom, po 13 kart każdemu. Jakie jest prawdopodobieństwo, że każdy z graczy ma co najmniej jednego pika?

6. Przypuśćmy, że w głosowaniu kandydat P otrzymał p głosów, a kandydat Q otrzymał q głosów, przy czym $p > q$. Pokaż, że prawdopodobieństwo tego, że w ciągu obliczania głosów było zawsze więcej głosów na P niż na Q wynosi $\frac{p-q}{p+q}$.

7. Rozważmy ciąg rzutów symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo, że w ciągu n rzutów monetą zdarzy się sytuacja, że liczba wyrzuconych orłów jest o k większa niż liczba reszek.

8. W urnie jest n kul białych i m kul czarnych. Wyciągamy kolejno wszystkie kule aż wyciągniemy b kul białych ($b \leqslant n$). Znajdź prawdopodobieństwo, że wyciągnięto dokładnie k kul ($k \leqslant n + m$).

9. W urnie jest n kul białych i m kul czarnych. Wyciągamy kolejno wszystkie kule.

   (a) Znajdź prawdopodobieństwo pojawienia się dokładnie r serii kul białych (np. sekwencja BBCBCCCBBBBCC) zawiera 3 serie kul białych.

   (b) Znajdź prawdopodobieństwo, że w sumie serii kul białych i serii kul czarnych będzie dokładnie r.

10. Rozważmy następujący paradoksalny eksperyment myślowy: minutę przed godziną dwunastą do urny wrzucamy 10 kul ponumerowanych $1, 2, \ldots, 10$ i wyciągamy jedną kulę. Następnie pól minuty przed godziną dwunastą wrzucamy do urny 10 kul ponumerowanych $11, 12, \ldots, 20$ i wyciągamy jedną kulę. Analogicznie robimy $1/4$ minuty przed dwunastą, $1/8$ minuty przed dwunastą, itd. Jakie jest prawdopodobieństwo, że o godzinie dwunastej urna będzie pusta?