Zadania z MNRP — seria 1
26.02.2015

Ozn. $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$

1. Rzucono pięć razy kostką do gry i otrzymane wyniki zapisano w ciąg. Ile jest wyników, w których
   (a) parzysta liczba oczek wypadła przynajmniej dwa razy?
   (b) jedynka pojawiła się dokładnie dwa razy a szótka dokładnie raz?
   (c) pojawił się blok złożony z czterech kolejnych liczba całkowitych?
2. (Kombinacje z powtórzeniami) Na ile sposobów można wybrać k-elementowy ciąg niemalejący o wyrazach w zbiorze $[n]$?
3. Na ile sposobów można rozmieścić k nierozróżnialnych kul w n ponumerowanych pudełkach, jeśli
   (a) nie ma żadnych ograniczneń?
   (b) w pudełku mieści się tylko jedna kula?
   (c) każde pudełko ma zawierać przynajmniej jedną kulę?
4. Ile jest różnych wyników rzutu r nierozróżnialnymi kostkami do gry? Ile różnych pochodnych cząstkowych rzędu r ma funkcja analityczna n zmiennych?
5. Wyznacz liczbę rozwiązań równania $x_1 + x_2 + \ldots + x_7 = 25$
   (a) w liczbach całkowitych nieujemnych;
   (b) w liczbach całkowitych dodatnich.
6. Na ile sposobów można wybrać k liczb ze zbioru $[n]$ tak, aby wśród wybranych nie było pary kolejnych liczb naturalnych?
7. Ile jest n-elementowych ciągów złożonych z k zer i $n - k$ jedynek, niezawierających dwóch zer pod rząd?
8. (Liczba nieporządków) Pokaż, że liczba D_n permutacji zbioru $[n]$ bez punktu stałego wynosi $n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!})$. (Mówimy, że indeks i jest punktem stałym permutacji $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zbioru $[n]$, jeśli $x_i = i$.)
9. Na ile sposobów można wybrać dwa niepuste i rozłączne podzbiory zbioru $[n]$?
10. Podaj kombinatoryczny dowód następujących tożsamości:
    (a) dla dowolnych $m, n, k \geqslant 0$,
    $$\binom{m+n}{k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j} \binom{n}{k-j};$$
    (b) dla dowolnego $n \geqslant 1$,
    $$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n 2^{n-1};$$

(c) dla dowolnych $0 \leqslant m \leqslant n$,

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m} 2^{n-m};$$

(d) dla dowolnego $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2};$$

(e) dla dowolnego $n \geqslant 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n;$$

(f) dla dowolnego $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

11. (Liczby Bella) Pokaż, że liczba σ-ciał podzbiorów zbioru $[n]$ wynosi $\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}$.