Metodyka nauczania rachunku prawdopodobieństwa
Kolokwium, 7 maja 2015 r.

Za rozwiązanie każdego z zadań można otrzymać maksymalnie 6 pkt.
Czas pracy: 90 minut

1. Podaj dowód kombinatoryczny następującej tożsamości: dla $n, k \geqslant 1$,
$$\binom{n+k}{n} = \sum_{j=n}^{n+k} \binom{j-1}{n-1}.$$
(Uwaga: rozwiązania, które w ocenie sprawdzającego nie zawierają argumentu kombinatorycznego, będą otrzymywać maksymalnie 3 pkt.)

2. Gracze A i B rzucają 30 razy kostką do gry. Jeśli wypadnie 1, 2, 3 lub 4 oczka, gracz A zdobywa punkt; jeśli zaś wypadnie 5 lub 6 oczek, punkt zdobywa gracz B. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w ciągu trwania tej rozgrywki, gracz A ani razu nie oddał prowadzenia graczowi B (tzn. A po każdym z 30 rzutów kostką ma co najmniej tyle punktów co B), jeśli wiadomo, że gra zakończyła się wynikiem $20 : 10$ dla A.

3. W talii złożonej z $2n$ kart są dokładnie dwa asy. Talię tasujemy i rozdajemy po n kart graczom A i B. Gracz A sprawdza pierwszą otrzymaną kartę i okazuje się, że jest to as. Jaka jest wówczas szansa, że B nie ma ani jednego asa? Ile w przybliżeniu wynosi otrzymany wynik dla dużych n?

4. Jacek i Placek rzucają symetryczną monetą: Jacek rzuca $n+1$ razy, Placek rzuca n razy. Pokaż, że prawdopodobieństwo, iż Jacek wyrzuci *więcej* orłów niż Placek, wynosi $1/2$.

5. A i B rzucają na zmianę parą kości do gry tak długo, aż A wyrzuci w sumę oczek 9 lub B wyrzuci w sumę oczek 6. Przyjmując, że pierwszy rzut wykonuje A, znajdź prawdopodobieństwo, że ostatni rzut należał do A.