Metodyka nauczania rachunku prawdopodobieństwa
Egzamin zerowy, 3 czerwca 2015 r.

1. *(7 pkt)* Z talii 52 kart losujemy 5 kart bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo, że otrzymaliśmy co najmniej cztery figury (figury to walet, dama, król i as), jeśli wiadomo, że mamy asa i nie mamy żadnych kierów.

2. *(7 pkt)* Trzej gracze, A, B i C, rzucają jednocześnie monetą. Moneta, którą rzuca A, wypada orłem do góry z prawdopodobieństwem p. To samo prawdopodobieństwo dotyczące monet, którymi rzuca B i C, wynosi odpowiednio q i r. Załóżmy, że $p, q, r \in (0, 1)$. Osoba, której pierwszej uda się wyrzucić coś innego aniżeli dwóm pozostałym osobom, wygrywa. Oblicz prawdopodobieństwo wygranej gracza A.

3. *(8 pkt)* Na kartce papieru zaznaczamy n punktów, które stanowią wierzchołki wielokąta foremnego. Następnie dla każdej pary punktów rzucamy niesymetryczną monetą, dla której orzeł wypada z prawdopodobieństwem $p \in (0, 1)$. Jeśli wypadnie orzeł, rysujemy odcinek łączący daną parę punktów. Wyróżnijmy dwa punkty i przez X i Y oznaczmy liczbę odcinków wychodzących z jednego i z drugiego punktu, odpowiednio. Oblicz $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}Y$ oraz $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

4. *(10 pkt)* W urnie znajduje się n kul ponumerowanych od 1 do n. Ciągniemy 10 kul ze zwracaniem i notujemy numery wyciąganych kul. Niech X oznacza ile różnych numerów zanotowaliśmy (np. jeśli zanotowaliśmy numery $5, 1, 13, 1, 4, 16, 4, 5, 9, 7$, to $X = 7$). Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej X.

5. *(10 pkt + 5(*) pkt)* Dla grupy n osób ($n \geqslant 2$) przygotowujemy n karteczek z nazwiskami wszystkich osób, po jednym nazwisku na każdej karteczce. Następnie karteczki rozdajemy w sposób losowy (każda osoba dostaje jedną karteczkę). Cała grupa zostaje podzielona na pewną liczbę zespołów zgodnie z następującą regułą: jeśli osoba X ma na karteczce nazwisko osoby Y, to X należy do tego samego zespołu co Y. Z całej grupy wyróżnijmy dwie osoby i nazwijmy je A i B.

   - Niech X oznacza liczbę członków zespołu, do którego należy A. Znajdź rozkład zmiennej X.
   - Oblicz prawdopodobieństwo, że A i B są w jednym zespole.
   - (*) Niech Y oznacza liczbę zespołów. Oblicz $\mathbb{E}Y$.

6. *(8 pkt)* Mamy dwie urny, A i B, oraz pięć kul ponumerowanych liczbami 1, 2, 3, 4, 5. Początkowo w urnie A znajdują się kule o numerach 1, 2, zaś w urnie B - pozostałe kule. Rzucamy kostką do gry i przenosimy z jednej urny do drugiej kulę o numerze równym liczbie oczek jaka wypadła, przy czym jeśli wypadła szóstka, nie robimy nic. Czynność tę powtarzamy dopóki jedna z urn będzie pusta. Oblicz prawdopodobieństwo, że na końcu eksperymentu pusta będzie urna A.