Praca na zaliczenie laboratorium komputerowego do wykładu z Równań Różniczkowych Zwyczajnych (*)

Rozważmy następujący układ trzech nieliniowych równań zwyczajnych

$$\begin{cases} u_1' + u_1 + \delta(u_2^2 + u_3^2) = 1 \\ u_2' + u_2 - \delta u_1 u_2 = 0 \\ u_3' + u_3 - \delta u_1 u_3 = 0 \end{cases} \tag{0.1}$$

z warunkiem początkowym dla $t = 0$. Ten układ wykazuje pewne podobieństwo do dużo bardziej skomplikowanego układu równań różniczkowych *cząstkowych* spotykanych w modelowaniu przepływu cieczy – tzw. równań Naviera–Stokesa. (Podobny przypadek jest opisany w skrypcie dla modelu Lorenza). Układ Naviera–Stokesa jest trudny do rozwiązania (również numerycznego), dlatego warto badać jego uproszczoną postać, tzn. układ (0.1).

Poniżej znajduje się kilka zadań, służących zbadaniu układu (0.1). Państwa praca polega na wykonaniu tych poleceń, używając w tym celu w **rozsądny** sposób wiedzy matematycznej, systemu Maple V oraz własnych procedur numerycznych. Rzecz jasna, chodzi głównie o to, aby w możliwie wielu czynnościach wspomóc się komputerem; jednakże zbytnia przesada ("...a teraz użyję specjalnego programu do znajdowania pierwiastka równania $x^2 - 1 = 0$...") będzie równie źle widziana, jak niepotrzebna oszczędność pracy maszyny ("...rozwijając w szereg Taylora dostajemy, że w przybliżeniu $sin(3.5) = -0.350783$..."). Ocenie podlegać więc będzie zdobyte przez Państwa doświadczenie w używaniu Maple V, Wasza zdolność efektywnego wspomagania się komputerem w pracy matematycznej, a także zrozumienie i umiejętność stosowania procedur numerycznych.

Oto zadania do wykonania:

1. Zbadać istnienie punktów stacjonarnych tego układu w zależności od parametru δ. Podać wartości własne macierzy układu zlinearyzowanego.

2. Dokonując podstawienia biegunowego $(u_2, u_3) \rightarrow (r, \theta)$ sprowadzić układ do prostszej postaci.

3. Wyprodukować pole wektorowe i "portret fazowy" (u_1, r) w otoczeniu punktów stacjonarnych. Zbadać *typ* punktów stacjonarnych (u_1, r) w zależności od parametru δ.

4. Znaleźć rozwiązania dla $t = 20$ równania (0.1) dla warunku początkowego $(1.5, -0.2, 0.0)$ i $\delta = \frac{9}{7}$. Jaka jest gwarancja, że uzyskane wartości są dokładne z tolerancją błędu 10^{-5} ? Narysować wykres (u_1, u_2, u_3) w funkcji czasu.

5. Zbadać, czy otrzymane rozwiązanie jest nieograniczone, gdy $t \rightarrow \infty$ (jeśli nie matematycznie, to przynajmniej podać przesłanki świadczące za stawianą hipotezą).

Rozwiązaniem problemu jest (a) dokładny opis postępowania z komentarzem, (b) plik z sesją Maple V z komentarzami (c) plik w Turbo Pascalu lub w Borland C z komentarzami. Wszystkie kody komputerowe muszą działać na Novellu lub na hydrze i muszą dawać wyniki (na tych maszynach) w *rozsądnym czasie*. Praca bez części (a) nie będzie sprawdzana.

Za całą pracę można dostać maksimum 4 punkty.

Pracę należy oddać (opis + dyskietka) do **28.05.97.**

Piotr Krzyzanowski