Michał Adamczyk
Uniwersytet Łódzki

O nierozróżnialności stanów kwantowych

Niech $M : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}^+(\mathbb{H})$ będzie miarą spektralną w przestrzeni Hilberta $\mathbb{H}$, t.j. przeliczalnie addytywną funkcją o wartościach będących ograniczonymi operatorami nieujemnymi, taką że $M(\emptyset) = 0$ oraz $M(\mathbb{R}) = 1$. Miara taka przyporządkowuje każdemu stanowi kwantowemu, tzn. nieujemnemu operatorowi $\rho \in \mathcal{L}^+(\mathbb{H})$ o śladzie $Tr\rho = 1$ miarę probabilistyczną na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ daną wzorem

$$\mu_\rho(B) = Tr[\rho M(B)] \quad \text{dla} \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Przyporządkowania takie, lub równoważnie miary spektralne, nazywał będę *pomiarami kwantowymi.*

W referacie tym podejmę temat nierozróżnialności stanów kwantowych. Dokładniej, podam warunki, jakie muszą spełniać stany kwantowe by pomiar M odwzorowywał je w tę samą miarę probabilistyczną. Szczególną uwagę poświęcę dość prostemu, lecz istotnemu ze względu na zastosowania przypadkowi $\mathbb{H} = \mathbb{C}^2$, dla którego podam warunki konieczny i dostateczny na to, by pomiar M nie rozróżniał stanów pewnej rodziny $\{\rho_\theta\}$.

Bibliografia

[1] Gill, R.D., Jupp, P.E. , Barndorff-Nielsen ,O,E. (2003) On Quantum Statistical Inference, J. Royal Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol. 63, 775-816
[2] Holevo, A.S. (1982) Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory, North-Holland Publishing Company
[3] Reed, M. , Simon, B. (1992) Methods of Modern Mathematical Physics: vol. 1 Functional Analysis, Academic Press, Inc.
[4] Hirvensalo, M. (2004) Quantum Computing, Springer

Marek Arendarczyk
Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego
Krzysztof Dębicki
Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego

Asymptotyka rozkładu supremum procesu gaussowskiego na odcinku o losowej długości

Niech $\{X(t)\,;\, t \geq 0\}$ będzie procesem gaussowskim o stacjonarnych przyrostach, którego funkcja wariancji $\sigma^2(t)$ spełnia pewne założenia regularności. W referacie zajmiemy się analizą $P(\sup_{t\in[0,T]} X(t) > u)$, przy $u \to \infty$ dla T będącego nieujemną zmienną losową niezależną od procesu $X(t)$.

W przypadku, gdy T jest zmienną losową o regularnie zmieniającym się ogonie rozkładu, asymptotyka jest ciężkoogonowa [2]. W referacie zostanie rozpatrzony przypadek T będącego zmienną losową o rozkładzie Weibulla. Udowodnimy, że w tym przypadku zachodzi

$$\lim_{u\to\infty} \frac{P(\sup_{t\in[0,T]} X(t) > u)}{P(X(T) > u)} = 1.$$

Uzyskane wyniki zastosujemy do znalezienia asymptotyki ogona rozkładu supremum dla ułamkowych ruchów Browna oraz ułamkowych ruchów Laplace'a.

Bibliografia

[1] Berman, S.M. (1985) On asymptotic formula for the distribution of the maximum of a gaussian process with stationary increments. *J. Appl. Prob.* **22**, 454-460.
[2] Borst, S.C., Dębicki, K., Zwart, A.P. (2004) The Supremum of a Gaussian Process over a Random Interval. *Stat. Prob. Lett.* **68,** 221-234.
[3] Piterbarg, V.I., Prisyazhnyuk, V.P. (1979). Asymptotics of the probability of large excursions for a nonstationary Gaussian process. *Theory Prob. Math. Statist.* **18,** 131-144.

Michał Baran
Uniwersytet Kardynała Stefan Wyszyńskiego

Zupełność rynku obligacji

Problem zupełności rynku obligacji dotyczy możliwości reprezentacji zmiennych losowych w postaci odpowienich całek stochastycznych. Zasadniczą różnicą pomiędzy modelami rynków obligacji a modelami rynków akcji jest możliwość używania do konstrukcji portfeli niekończonej ilości aktywów. Każda obligacja jest scharakteryzowana za pomocą terminu wykupu $T \in [0, T^*]$, gdzie $T^* < \infty$. Przyjmuje się, że proces cen obligacji P ma wartości w pewnej przestrzeni Banacha B, zaś portfel φ, to element przestrzeni dualnej B^*. Problem zupełności polega na zbadaniu możliwości reprezentacji

$$\int_0^{T^*} < \varphi, dP >_{B^*,B} = H$$

dla dowolnej zmiennej losowej H z określonej przestrzeni.
W referacie mówione zostanie powyższe zagadnienie w przypadku modelu zadanego przez równanie stopy forward:

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dW(t) + \int_{\mathbb{R}} \gamma(t,T)xN(dt,dx), \quad t,T \in [0,T^*]$$

gdzie W jest jednowymiarowym procesem Wienera, zaś N niezależną od niego Poissonowską miarą losową. Możliwość omawianej reprezentacji jest zależna od własności miary Levy'ego oraz współczynników modelu.
Powyższy model był już ropatrywany w kilku pracach, np. [1], [2], [3], jednakże prace te nie dawały pełnej odpowiedzi na postawione pytanie.
Uzyskane wyniki powstały we współpracy z prof. J. Zabczykiem.

Bibliografia

[1] Th. Björk, G. Di Masi, Y. Kabanov and W. Runggaldier, (1997) *Towards a general theory of bond markets, Finance and Stochastic 1, 141-174.*
[2] Björk T., Kabanov Yu., Runggaldier W. (1997) *Bond market structure in the presence of marked point process*, Mathematical Finance, Vol.7, No.2, p.211-239
[3] Eberlein E., Jacod J., Raible S. (2005) *Lévy term structure models: No-arbitrage and completeness*, Finance and Stochastics, 9, p.67-88

Artur Bator
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej
Wiesław Zięba
Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej

O zbieżności prawie pewnej amartów o wartościach w przestrzeniach metrycznych.

Operacja kombinacji wypukłej

Niech $(\mathbb{E}, d)$ będzie przestrzenią metryczną z *operacją kombinacji wypukłej*, która dla wszystkich $n \geq 2$, stałych $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > 0$ spełniających warunek $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ i wszystkich punktów $u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathbb{E}$ jako wynik daje element przestrzeni $\mathbb{E}$ oznaczany przez $[\lambda_1, u_1; \lambda_2, u_2; \ldots; \lambda_n, u_n]$ lub $[\lambda_i, u_i]_{i=1}^n$. Zakładamy, że $[1u] = u$ dla każdego $u \in \mathbb{E}$. Ponadto niech wprowadzona operacja ma następujące własności

1. $[\lambda_i, u_i]_{i=1}^n = [\lambda_{\sigma(i)}, u_{\sigma(i)}]_{i=1}^n$ dla dowolnej permutacji σ zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$;
2. $[\lambda_i, u_i]_{i=1}^{n+2} = [\lambda_1, u_1; \lambda_2, u_2; \ldots; \lambda_{n+1} + \lambda_{n+2}, [\frac{\lambda_{n+j}}{\lambda_{n+1}+\lambda_{n+2}}, u_{n+j}]_{j=1}^2]$;
3. $[\lambda^{(k)}, u; 1 - \lambda^{(k)}, v] \to [\lambda, u; 1 - \lambda, v]$
   dla dowolnego ciągu $\lambda^{(k)} \to \lambda \in (0, 1)$; $k \to \infty$;
4. $0 < d([\lambda, u; 1 - \lambda, w], [\lambda, v; 1 - \lambda, w]) \leq \lambda d(u, v)$
   dla dowolnego $\lambda \in (0, 1]$ i dowolnych $u, v, w \in \mathbb{E}$ takich, że $d(u, v) > 0$;
5. Dla każdego $u \in \mathbb{E}$, istnieje $Ku := \lim_{n\to\infty} [n^{-1}, u]_{i=1}^n$;
6. $d(u, v) > 0 \Rightarrow d(Ku, Kv) > 0$.

Przestrzeń metryczną $(\mathbb{E}, d)$ z operacją spełniającą powyższe założenia nazywamy *przestrzenią z gładką kombinacją wypukłą*.

Elementy losowe, wartość oczekiwana i amarty

Na takich przestrzeniach wprowadzamy wartośc oczekiwaną dowolnego prostego elementu losowego wzorem

$$EX = [p_i; Kx_i]_{i=1}^n.$$

Element losowy X nazywamy *całkowalnym* jeśli $d(u_0, X)$ jest całkowalną zmienną losową dla pewnego $u_0 \in \mathbb{E}$. Przez $L_{\mathbb{E}}$ oznaczamy zbiór wszystkich całkowalnych elementów losowych.

Następnie definiujemy amart następująco:

Niech $\{X_n\}$ będzie całkowalną rodziną ellementów losowych adaptowaną do $\{\mathcal{A}_n\}$. Nazwiemy $\{X_n, \mathcal{A}_n\}$ amartem jeśli sieć $\{EX_\tau; \tau \in T\}$ jest zbieżna do pewnego $u \in \mathbb{E}$,

$$EX_\tau \to u, \qquad \tau \in T.$$

Wyniki

Twierdzenie 1 (Własność losowej identyfikacji) *Niech $X_1, X_2 \in L_{\mathbb{E}}$. Jeśli dla dowolnej zmiennej losowej $\tau : \Omega \to \{1, 2\}$ $EX_\tau = EX_1$ to $X_1 = X_2$ (pp).*

To twierdzenie gra kluczową rolę w dowodzie prawie pewnej zbieżności amartów.

Twierdzenie 2 *Każdy mocno ciasny amart $\{X_n;\ n \geq 1\}$ przyjmujący wartości w przestrzeni z gładką kombinacją wypukłą, spełniający warunek*

$$\exists (u_0 \in E)\ \exists (Y \in L_{\mathbb{E}}) :\ \sup_{n \geq 1} d(u_0, X_n) < d(u_0, Y).$$

jest zbieżny prawie pewnie.

Bibliografia

[1] Beneš, V. E. (1962). Martingales on metric spaces. Teor. Veroyatnost. i Primenen. 7, 6*.
[2] Doss, S. (1949). Sur la moyenne d'un élément aléatoire dans un espace métrique. Bull. Sci. Math. 73, 48-72.
[3] Fréchet, M. (1956). Sur diverses définitions de la moyenne d'un élément aléatoire de nature quelconque. Giorn. Inst. Ital. Att. 19, 1-15.
[4] Herer, W. (1992). Mathematical expectation and strong law of large numbers for random variables with values in a metric space of negative curvature.
[5] Kruk, Ł., Zięba, W. (1995). A criterion of almost sure convergence of asymptotic martingales in a Banach space. Yokohama Mathematical Journal 43, 61-72.
[6] Pick, R. (1987). Expectation in metric spaces. Stud. Sci. Math. Hungarica 22, 347-350.
[7] Sturm, K. T. (2002). Nonlinear martingale theory for processes with values in metric spaces of nonpositive curvature. Ann. Probab. 30, 1195-1222.
[8] Terán, P., Molchanov, I. (2006). The law of large numbers in a mertic space with a convex combination operation. J. Theoret. Probab. 19, 4, 875-897.

Bartłomiej Błaszczszyn
INRIA/ENS i Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego

A Stochastic Geometry Framework for Modeling of Wireless Communication Networks

Stochastic geometry is a rich branch of applied probability which allows one to quantify random phenomena on the plane or in higher dimension. It is intrinsically related to the theory of point processes. Initially its development was stimulated by applications to biology, astronomy and material sciences. Nowadays it is also widely used in image analysis. Fundamentally, Stochastic Geometry provides a way of estimating and computing spatial averages. A typical example, with obvious communication implications, is the so called Boolean model, which is defined as the union of discs with random radii (communication ranges), centered at the points of a Poisson point process (the random user locations) of the Euclidean plane (e.g a large city). A first typical question is that of the prediction of the fraction of the plane which is covered by this union (statistics of coverage). A second one is whether this union has an infnite component or not (connectivity).

Boolean Stochastic Geometry is not sufficient for analyzing wireless networks as it ignores the specific nature of radio channels. Consider a wireless communication network made of a collection of nodes which can in turn be transmitters or receivers (depending on the network considered, nodes will be mobile users, network, access points of a WiFi mesh, sensors etc.). At a given time, some subset of this collection of nodes (specified by the MAC protocol) simultaneously transmit, each toward its own receiver (specified by the routing protocol). Each transmitter receiver pair in this snapshot requires its own wireless link. For each such wireless link, the power of the signal received from the link transmitter is jammed by the powers of the signals received from the other transmitters. The geometry of the location of nodes plays a key role within this setting since it determines the signal to interference and noise ratio (SINR) at the receiver of each such link and hence the possibility of establishing simultaneously this collection of links at a given bitrate, as shown by Information Theory. The interference field, which mathematically is modeled by some shot-noise field, hence determines the connectivity and the capacity of the network in a broad sense. The essential point here is that the qualities and even the feasibilities of the radio links that are simultaneously active are strongly interdependent and determined by the geometry, a situation that radically differs from the wireline setting.

The interference-aware Stochastic Geometry provides a way of defining and computing macroscopic properties of wireless networks as function of a few parameters by some averaging over all potential random patterns for node locations in the plane and their radio channel characteristics, in the same way as queuing theory provides averaged response times or congestion over all potential arrival and service patterns within a given parametric class. These macroscopic properties allow one to characterize the key dependencies of the network performance characteristics (connectivity, stability, capacity, dynamics etc.).

This talk will present the foundations and some recent developments of a comprehensive stochastic geometry framework for modeling of wireless networks.

Bibliografia

[1] F. Baccelli and B. Błaszczyszyn *Spatial Modeling of Wireless Communications, a Stochastic Geometry Approach*, monograph for Foundations and Trends in Networking, NOW Publishers; In preparation.

Konstancja Bobecka
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska, Warszawa

Własność niezależności Kshirsagara-Tana i związane z nią charakteryzacje

Zaprezentowana zostanie nowa własność typu niezależnościowego jednowymiarowego rozkładu beta, związana z wynikami Kshirsagara (1961) i Tana (1969) dotyczącymi macierzowego rozkładu typu beta. Pokazane zostanie, że własność ta charakteryzuje jednowymiarowy rozkład beta. Pokazane zostanie również, że w przypadku macierzowym, klasa rozkładów mających własność Kshirsagara-Tana jest szersza tzn. obejmuje nie tylko rozkład beta. Dokonana zostanie kompletna identyfikacja tej klasy rozkładów dla macierzy 2x2.

Wyniki uzyskane zostały wspólnie z J. Wesołowskim.

Bibliografia

[1] Bobecka, K., Wesołowski, J. (2007) Kshirsagar-Tan independence property of beta matrices and related characterizations. Preprint, 1-8.

[2] Kshirsagar, A. M. (1961) The non-central multivariate beta distribution. *Ann. Math. Statist.* **32**, 104-111.

[3] Tan, W. Y. (1969) Note on the multivariate and generalized multivariate beta distributions. *J. Amer. Statist. Assoc.* **64**, 230-241.

Adam Bobrowski
IM PAN, Oddział w Katowicach i Politechnika Lubelska
Marek Kimmel
Uniwersytet im W. M. Rice'a w Houston i Politechnika Gliwicka
Tomasz Wojdyła
Politechnika Gliwicka

Mutacja, rekombinacja i dryf, oraz łańcuch Markowa o wartościach w stożku rozkładów łącznych.

Pochodzące z genetyki populacyjnej modele typu Wrighta-Fishera, w których uwzględnia się rekombinacje między chromosomami charakteryzuja się tym, że typowa analiza czasu do wspólnego przodka podpopulacji nie prowadzi do zamkniętych równań na interesujące nas charakterystyki. Możliwość rekombinacji sprawia bowiem, że rozkład próbki n elementowej zależy od rozkładu próbki $n+1$ elementowej. Z tego względu najczęściej bada się takie modele metodami symulacyjnymi. W referacie pokazujemy podejście alternatywne, bardziej analityczne. Miast na pełnych rozkładach próbek koncentrujemy się na pewnych rozkładach cząstkowych (niosących jednak istotne informacje): rozkłady te, jak się okazuje, tworzą układ zamknięty. Ich ewolucję w czasie można opisać za pomocą pewnego równania różniczkowego w stożku rozkładów. Rekombinacje opisuje w nim pewien łańcuch Markowa, którego liczba stanów (będących typami rozkładów łącznych) zależy od ilości miejsc, w których przecięty może zostać chromosom w momencie rekombinacji: jeśli miejsc tych jest n to rozkładów tych jest tyle ile podziałów n elementowego zbioru (liczba Bella). Okazuje się, że w.w. łańcuch jest ergodyczny a co za tym idzie, długofalowo rekombinacja wpływa na populację jedynie poprzez jego stan stacjonarny.

Krzysztof Bogdan
Instytut Matematyki i Informatyki Politechniki Wrocławskiej

3G, 3P, 3U

Porównywanie *funkcji Greena*, *prawdopodobieństwa przejścia* i *rezolwenty* np. ułamkowego laplasu, $\Delta^{\frac{\alpha}{2}}$, i jego addytywnego zaburzenia, $\Delta^{\frac{\alpha}{2}} + q$, znacznie się upraszcza, gdy zachodzą pewne odpowiedniki nierówności trójkąta (3G, 3P, 3U). Opowiem o wynikach tego typu uzyskanych wspólnie z Tomaszem Byczkowskim, Tomaszem Jakubowskim i Wolfhardem Hansenem.

Bibliografia

[1] K. Bogdan, T. Byczkowski. "Potential theory for the α-stable Schrödinger operator on bounded Lipschitz domains". *Studia Math.*, 133(1):53–92, 1999.
[2] K. Bogdan, T. Jakubowski. "Estimates of heat kernel of fractional Laplacian perturbed by gradient operators". *Comm. Math. Phys.*, 271(1):179–198, 2007.
[3] K. Bogdan, W. Hansen, T. Jakubowski. "Time-dependent Schrödinger perturbations of transition densities", *preprint*, 2007.

Tomasz Bojdecki
Uniwersytet Warszawski

O pewnych uogólnieniach i rozszerzeniach ułamkowego i podułamkowego ruchu Browna, związanych z układami cząstek

Referat zawiera wyniki uzyskane wspólnie z L.G. Gorostizą i A. Talarczyk, opublikowane w pracy [3].

W pracy [4], a także [5] otrzymaliśmy scentrowany gaussowski proces $\xi = (\xi_t)_{t\geq 0}$ o funkcji kowariancji

$$E\xi_t\xi_s = \int_0^{t\wedge s} u^{-\frac{\gamma}{\alpha}}((t-u)^{1-\frac{1}{\alpha}} + (s-u)^{1-\frac{1}{\alpha}})\, du$$

dla $0 \leq \gamma \leq 1 < \alpha \leq 2$. Pojawił się on jako granica fluktuacji procesów przebywania pewnych układów cząstek bez rozgałęziania. Zauważmy, że dla $\gamma = 0$ jest to ułamkowy ruch Browna z parametrem Hursta z przedziału $(1/2, 3/4]$.

Jednym z celów referatu jest odpowiedzieć na naturalne pytanie o istnienie i własności scentrowanego procesu Gaussa ξ o kowariancji postaci

$$E\xi_t\xi_s = \int_0^{t\wedge s} u^a((t-u)^b + (t-s)^b)\, du.$$

Okazuje się, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na istnienie takiego procesu jest

$$a > -1,\ -1 < b \leq 1,\ |b| \leq 1 + a.$$

Dla $a = 0$ otrzymujemy ułamkowy ruch Browna dla pełnego zakresu parametrów, dlatego nazwaliśmy ten proces *ułamkowym ruchem Browna z wagą (weighted Brownian motion).*

Z układami cząstek z rozgałęzianiem związany jest natomiast proces gaussowski scentrowany ζ z funkcją kowariancji

$$E\zeta_t\zeta_s = (2-h)\big(s^h + t^h - \frac{1}{2}((s+t)^h - |s-t|^h)\big).$$

Dla $0 < h < 2$ jest to tzw. podułamkowy ruch Browna. Jako proces graniczny pojawił się on w pracach [2], [6], a jego własności zostały omówione w [1]. W pracy [5] otrzymaliśmy w granicy ten proces z $2 < h \leq 5/2$. Można pokazać, że maksymalny zakres parametru h, dla którego ten proces istnieje to $0 \leq h \leq 4$. Dla $2 < h < 4$ nazwaliśmy ten proces *ujemnym podułamkowym ruchem Browna*. W odróżnieniu od podułamkowego ruchu Browna (dla $h \neq 1$) jest on semimartyngałem.

Trzeci proces, scentrowany gaussowski, blisko związany z ujemnym podułamkowym r.B. ma kowariancję

$$-\big(s^2 \log s + t^2 \log t - \frac{1}{2}((s+t)^2 \log(s+t) + (s-t)^2 \log|s-t|)\big).$$

Ciekawe, że ten proces nie jest semimartyngałem.

Bibliografia

[1] Bojdecki, T., Gorostiza, L.G., Talarczyk, A. (2004) Sub-fractional Brownian motion and its relation to occupation times, Stat. Probab. Lett. 69, 405-419.
[2] Bojdecki, T., Gorostiza, L.G., Talarczyk, A. (2006) Limit theorems for occupation time fluctuations of branching system I: long-range dependence, Stoch. Proc. Appl. 116, 1-18.
[3] Bojdecki, T., Gorostiza, L.G., Talarczyk, A. (2007) Some extensions of fractional Brownian motion and sub-fractional Brownian motion related to particle systems, Elect. Comm. in Probab. 12, 161-172.
[4] Bojdecki, T., Gorostiza, L.G., Talarczyk, A. (2008) Occupation time limits of inhomogeneous Poisson systems of independent particles, Stoch. Proc. Appl. 118, 28-52.
[5] Bojdecki, T., Gorostiza, L.G., Talarczyk, A. (2008) Self-similar stable processes arising from high-density limits of occupation times of particle systems, Potential Anal. 28, 71-103.
[6] Miłoś, P. (2007) Occupation time fluctuations of Poisson and equilibrium finite variance branching systems, Probab. Math. Stat. 27, 181-203.

Joanna Chachulska
Politechnika Warszawska, Warszawa

Identyfikacja miar na podstawie transformat Laplace'a przy założonej postaci macierzy wariancji naturalnej rodziny wykładniczej

Zagadnieniami klasyfikacyjnymi związanymi z liniową i kwadratową funkcją wariancji naturalnych rodzin wykładniczych zajmowali się m.in. Letac (1989) i Casalis (1996). Hassairi i Zarai (2006) opisali wielowymiarowe kubiczne naturalne rodziny wykładnicze. Rozważano także problem identyfikacji miar przy niepełnej wiedzy dotyczącej macierzowej funkcji wariancji: Bar-Lev et al. (1994) podali pełen opis tzw. diagonalnych naturalnych rodzin wykładniczych, Letac i Wesołowski

(2006) badali wielowymiarowe naturalne rodziny wykładnicze, dla których macierz wariancji jest kwadratowa poza podprzestrzenią jednowymiarową.

W referacie przedstawiony zostanie problem identyfikacji miar należących do naturalnych rodzin wykładniczych o kwadratowej przekątnej macierzowej funkcji wariancji. Założona postać funkcji wariancji prowadzi do równań różniczkowych na transformatę kumulanty. Główne trudności problemu tkwią w sprawdzeniu przy jakich warunkach rozwiązanie danego równania różniczkowego jest funkcją wariancji oraz w identyfikacji odpowiadającej jej rodziny wykładniczej.

Bibliografia

[1] Bar-Lev, S. K., Bshouty, D., Enis, P., Letac, G., Lu, I., Richards, D. (1994) The diagonal multivariate natural exponential families and their classification, J. Theor. Probab. 7, 883–929.
[2] Casalis, M. (1996) The $2d+4$ simple quadratic natural exponential families on R^d, Ann. Statist. 24, no 4, 1828–1854.
[3] Hassairi, A., Zarai, M. (2006) Characterization of the simple cubic multivariate exponential families, J. Func. Anal. 235, 69–89.
[4] Letac, G., Wesołowski, J. (2007) Laplace transforms which are negative powers of quadratic polynomials, Trans. Amer. Math. Soc. (w druku).

Zbigniew Ciesielski
IMPAN Sopot
Ryszard Zieliński
IMPAN Warszawa

O jednostajnie zupełnej zbieżności kawałkami wielomianowego estymatora funkcji rozkładu prawdopodobieństwa

Rozpatrujemy nieparametryczny model statystyczny z rodziną $\mathcal{F}$ wszystkich ciągłych dystrybuant. Na podstawie próby $X_1, \ldots, X_n$ z rozkładu o pewnej nieznanej dystrybuancie $F \in \mathcal{F}$ chcemy oszacować F. Konstruujemy estymator $F_{m,n}$ o następujących własnościach

1) $F_{m,n}$ jest kawałkami wielomianowy z węzłami w punktach próby;
2) Dla dowolnie ustalonego przez statystyka m, $F_{m,n}(x) \in C^m(R)$;
3) Dla każdego $\varepsilon > 0$ oraz m, $\sum_{n=1}^{\infty} \sup\limits_{\mathcal{F}} P\{||F_{m,n} - F||_\infty > \varepsilon\} < \infty$.

Dla estymatora $F_{m,n}$ podajemy nierówność typu nierówności Dvoretzkiego-Kiefera-Wolfowitza, której konsekwencją jest podana wyżej asymptotyczna własność 3) i która dla każdych m oraz n pozwala oszacować błąd przybliżenia F przez $F_{m,n}$.

Inne przykłady rodzin $\mathcal{F}$ (np. klas Höldera) i estymatorów spełniającyh nierówność typu DKW otrzymujemy z prac Z.Ciesielskiego (1988-1998) poświęconych nieparametrycznej estymacji.

Krzysztof Dębicki
Instytut Matematyczny

Uniwersytet Wrocławski
Paweł Kisowski
Instytut Matematyczny
Uniwersytet Wrocławski

Stałe Pickands'a - własności i oszacowania

Niech $\{B_\alpha(t), t \geq 0\}$ będzie ułamkowym ruchem Browna z parametrem Hursta $\frac{\alpha}{2}$, $\alpha \in (0, 2]$. Stałe Pickands'a

$$\mathcal{H}_{B_\alpha} := \lim_{T\to\infty} \frac{\mathrm{E}\exp\left(\sup_{t\in[0,T]}(\sqrt{2}B_\alpha(t) - t^\alpha)\right)}{T}$$

grają ważną rolę w teorii wartości ekstremalnych procesów gaussowskich. Występują one zarówno w asymptotykach rozkładu supremum z procesów
i pól gaussowskich, jak również w zagadnieniach związanych z prawami iterowanego logarytmu typu Erdös-Révész'a dla procesów gaussowskich.

W komunikacie przedstawimy nowe własności oraz górne oszacowania na $\mathcal{H}_{B_\alpha}$, gdy $\alpha \in (1, 2]$. Uzyskane wyniki poprawiają oszacowania otrzymane przez Shao [3].

Bibliografia

[1] Dębicki, K. (2006) Some properties of generalized Pickands constants. *Theory Probab. Appl.* **50**, 290–298.

[2] Dębicki, K. & Kisowski, P. (2008) A note on upper estimates for Pickands constants. *To appear in Stat. Prob. Lett.*

[3] Shao, Q.M. (1996) Bounds and estimators of a basic constant in extreme value theory of Gaussian processes. *Statistica Sinica* **6**, 245–257.

Tomasz Grzywny
Instytut Matematyki i Informatyki Politechniki Wrocławskiej

Mocna ultrakontraktywność dla procesów Lévy'ego

Rozważamy symetryczny proces Lévy'ego $\{X_t\}_{t\geq 0}$. Zakładamy, że proces ten posiada ciągłą gęstość prawdopodobieństwa przejścia $p(t, x, y)$. Ponadto dla każdej $\delta > 0$ istnieje stała $c = c(\delta) > 0$ taka, że $p(t, x, y) \leq c$, dla $|x - y| > \delta$ i $t > 0$. Przy założeniu pewnych warunków na zachowanie się miary Lévy'ego w okolicy 0 pokazujemy, że półgrupa operatorów $\{P_t^D\}_{t\geq 0}$ generowana przez proces Lévy'ego $\{X_t\}_{t\geq 0}$ zabity po wyjściu z ograniczonego obszaru Lipschitza jest mocno ultrakontraktywna. To znaczy dla każdego
$t > 0$ istnieje stała C_t taka, że gęstość prawdopodobieństwa przejścia $p_D(t, x, y)$ procesu zabitego po wyjściu z D spełnia

$$p_D(t, x, y) \leq C_t \varphi_D(x)\varphi_D(y), \quad x, y \in D,$$

gdzie φ_D jest funkcją własną odpowiadającą największej wartości własnej dla operatora P_t^D.

Bibliografia

[1] Grzywny, T. (2008) Intrinsic ultracontractivity for Lévy processes, Prob. Math. Stat. 28(1): 91–106.

Paweł Hitczenko
Department of Mathematics, Drexel University, Philadelphia, PA 19104, USA
Jacek Wesołowski
MiNI, Politechnika Warszawska, 00-661 Warszawa, Pl. Politechniki 1

Ogony perpetuit losowych

Przez perpetuitę losową (perpetuitę) rozumie się zmienną losową R spełniającą równanie

$$R \stackrel{d}{=} Q + MR,$$

gdzie (Q, M) jest parą zmiennych losowych niezależną od R a symbol $\stackrel{d}{=}$ oznacza równość według rozkładów. Alternatywnie, R jest granicą (według rozkładów) ciągu zmiennych losowych (R_n) spełniających równanie

$$R_n = Q_n + M_n R_{n-1}, \quad n \geq 1, \tag{1}$$

gdzie (Q_n, M_n) jest ciągiem niezależnych, identycznie rozłożonych kopii (Q, M) a R_0 jest dowolne. W związku z tym R może być przedstawiona w postaci

$$R \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{\infty} Q_i \prod_{j=1}^{i-1} M_i. \tag{2}$$

Warunki gwarantujące zbieżność w (1) i (2) są znane i pochodzą od Kestena [4]. Perpetuity pojawiają się w najprzeróżniejszych zastosowaniach ([1]–[5]). Głównym przedmiotem badań jest zachowanie się ogonów R:

$$P(R \geq x), \quad P(R \leq -x), \quad \text{gdy} \quad x \to \infty.$$

Dla uproszczenia skupimy się na sytuacji gdy Q i M są nieujemne. Kesten udowodnił, że jeśli $\exists\, r > 0$: $EM^r = 1$, $EM^r \ln^+ M < \infty$ oraz $EQ^r < \infty$ to

$$P(R \geq x) \sim cx^{-r} \quad \text{gdy} \quad x \to \infty.$$

Goldie i Grübel [3] rozważali uzupełniający przypadek $0 \leq M \leq 1$. W niezdegenerowanej sytuacji $P(M = 1) < 1$ udowodnili między innymi, że gdy $Q \equiv q$ to

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\ln P(R \geq x)}{x} \leq \frac{1}{q} \ln(EM).$$

Bez dalszych założeń o zachowaniu się rozkładu M w okolicach 1 jest to najlepsze możliwe oszacowanie, gdyż jeśli M jest skupiona na $\{0, 1\}$ to R ma rozkład geometryczny. Pokazali oni również, że jeśli M w okolicach 1 zachowuje się jak jednostajna zmienna losowa w następującym sensie:

$$\exists\, \varepsilon > 0, 0 < c, C < \infty\ \forall \delta \in (0, \varepsilon] \quad c\delta \leq P(1 - \delta \leq M \leq 1) \leq C\delta$$

to ogon R jest poissonowski tzn:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(P(R \geq x))}{x \ln x} = -\frac{1}{q}. \tag{3}$$

W referacie przedstawimy dalsze wyniki dotyczące związków pomiędzy zachowaniem się gęstości M w okolicy 1 a szybkością ubywania ogonów R. W szczególności:

(i) pokażemy, że (3) (z 1 po prawej stronie zastąpioną przez β) zachodzi dla M mającego dowolny rozkład beta(α, β) w otoczeniu 1.

(ii) dla danego $1 < r < \infty$ skonstruujemy M, taką że $\exists\ C_1, C_2$:

$$-\infty < C_1 \leq \liminf_{x\to\infty} \frac{\ln P(R \geq x)}{(x/q)^r} \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{\ln P(R \geq x)}{(x/q)^r} \leq C_2 < 0.$$

(iii) podamy dalsze przykłady zachowań ogonów R.

Bibliografia

[1] Embrechts, P., Goldie, C. M. (1994) Perpetuities and random equations. Asymptotic statistics (Prague, 1993), *Contrib. Statist.*, 75–86.
[2] Goldie, C. M. (1991) Implicit renewal theory and tails of solutions of random equations, *Ann. Appl. Probab.* **1**, 126–166.
[3] Goldie, C. M., Grübel, R. (1996) Perpetuities with thin tails, *Adv. Appl. Probab.* **28**, 463–480.
[4] Kesten, H. (1973) Random difference equations and renewal theory for products of random matrices, *Acta Math.* **131**, 207–248.
[5] Vervaat, W. (1979) On a stochastic difference equation and a representation of nonnegative infinitely divisible random variables, *Adv. Appl. Probab.* **11**, 750–783.

Ewa Iwaniec
Politechnika Warszawska, Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych

Związek stopnia regularności generatora kopuły Archimedesowej i postaci jej jednorodnego rozwinięcia dolnego ogona.

Mówimy, że kopuła C ma jednorodne rozwinięcie dolnego ogona stopnia k jeśli w okolicach zera można ją jednostajnie aproksymować funkcją jednorodną stopnia k. Okazuje się, że w przypadku ścisłych kopuł Archimedesowych, istnieje związek pomiędzy stopniem τ regularności generatora kopuły φ, gdzie

$$\forall\ 0 < x < 1 \quad \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(tx)}{\varphi(t)} = x^{\tau}.$$

oraz istnieniem i postacią jednorodnego rozwinięcia takich kopuł.

Podczas referatu przedstawione zostanie twierdzenie reprezentacyjne o istnieniu asymptotycznych rozwinięć kopuł z zastosowaniem funkcji jednorodnych dowolnego stopnia, a także twierdzenia opisujące postać jednorodnych rozwinięć w zależności od wartości indeksu τ.

Bibliografia

[1] Embrechts, P., Lindskog, F., McNeil, A. (2001) ”Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management”, www.risklab.ch.
[2] Jaworski, P. (2003) ”Asymptotyka dwuwymiarowych kopuli”, Matematyka Stosowana 4, 2003, pp. 78-89.
[3] Jaworski, P. (2004) ”On Uniform Tail Expansions of Bivariate Copulas”, Applicationes Mathematicae 31, 4 (2004), pp. 397-415.
[4] Frahm, G., Junker, M., Schmidt, R. (2006) ”Estimating the tail-dependence coefficient: Properties and pitfalls”, Insurance Math. Econom. 37, 37 (2006), pp. 80-100.
[5] Charpentier, A., Segers, J. (2006) ”Tails of Multivariate Archimedean Copulas”.

Jacek Jakubowski
Instytut Matematyki, WydziałMIM Uniwersytet Warszawski i WydziałMiNI PW
Mariusz Niewęgłowski
Wydział MiNI PW

Wycena wypłat narażonych na ryzyko kredytowe uwzględniająca ratingi

W referacie zostanie przedstawiona klasa podwójnie stochastycznych łańcuchów Markowa - klasa procesów dobrze opisujących proces migracji ratingów kredytowych. Zawiera ona klasyczne procesy migracji zaproponowane przez Lando i przez Bieleckiego i Rutkowskiego. Dla tej klasy zostanie wyprowadzony wzór na cenę ex-dividend wypłaty narażonej na ryzyko kredytowe i wrażliwej na zmianę ratingów kredytowych z momentem zapadalności w chwili T. Wypłata narażona na ryzyko kredytowe i uwzględniająca ratingi jest zdefiniowana standardowo poprzez podanie przyrzeczonej wypłaty, przyrzeczonej dywidendy, procesu odzysku, procesu migracji ratingów i momentu bankructwa.

Bibliografia

[1] Jakubowski J., Niewęgłowski M., Valuation of defaultable rating-sensitive claims, preprint 2008

Tomasz Jakubowski
Instytut Matematyki i Informatyki Politechniki Wrocławskiej

Nieautonomiczne zaburzenia Schrödingerowskie gęstości przejścia

Oznaczmy przez $p(s,x,t,y)$ gęstość przejścia procesu Markowa X. Będę rozważał zaburzenie Schrödingerowskie zależne od czasu dane przez funkcję $q(t,x)$, spełniającą pewien warunek małości. Skonstruuję gęstość przejścia zaburzonej półgrupy oraz pokażę, że skonstruowana gęstość porównuje się z $p(s,x,t,y)$.

Bibliografia

[1] K. Bogdan, W. Hansen, T. Jakubowski. "Time-dependent Schrödinger perturbations of transition densities", *preprint*, 2007.

Katarzyna Jańczak
Uniwersytet Technologiczno–Przyrodniczy w Bydgoszczy

Uogólnione stochastyczne równania różniczkowe wstecz z odbiciem

Celem prezentacji jest pokazanie istnienia rozwiązania tzw. uogólnionego stochastycznego równania różniczkowego wstecz z odbiciem postaci

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds + \int_t^T \varphi(s, Y_s)d\Lambda_s - \int_t^T Z_s dW_s + K_T - K_t,\ t \in [0, T], \tag{1}$$

gdzie W jest m-wymiarowym procesem Wienera, Λ jednowymiarowym rosnącym procesem, a d-wymiarowy proces Y przyjmuje wartości w zadanym wypukłym zbiorze D. Równanie tego typu było rozważane wcześniej tylko w przypadku jednowymiarowym [2].

Podamy również schemat aproksymujący rozwiązanie równania (1) oraz jego zastosowanie do numerycznego rozwiązywania nieliniowego problemu Neumanna z przeszkodą.

Bibliografia

[1] K. Jańczak, Generalized reflected backward stochastic differential equations, preprint.
[2] Y. Ren, N. Xia, Generalized reflected BSDE and an obstacle problem for PDEs with a nonlinear Neumann boundary condition, Stochastic Analysis and Applications **24** (2006), 1–21.

Barbara H. Jasiulis
Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski
Jolanta K. Misiewicz
Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonometrii, Uniwersytet Zielonogórski

Jednoznaczność splotu Kendalla

Urbanik w [2] zauważył, że

$$\delta_x \diamond_\alpha \delta_1 = x^\alpha \pi_{2\alpha} + (1 - x^\alpha)\delta_1,$$

gdzie $\pi_{2\alpha}$ jest rozkładem Pareto o gęstości $2\alpha y^{-2\alpha+1} I_{[1,\infty)}(y)$, definiuje splot uogólniony na $\mathcal{P}_+$. Sploty te Urbanik nazwał splotami Kendalla w nawiązaniu do pracy [1], gdzie pojawiajaą się zalążki $\diamond_1$-splotu. Pokażemy, że sploty $\diamond_\alpha$, dla $\alpha > 0$, są jedynymi możliwymi splotami uogólnionymi zdefiniowanymi przez liniową kombinacje dwóch ustalonych miar. Ponadto przy $\alpha \leqslant 1$ splot $\diamond_\alpha$ jest słabym splotem uogólnionym.

Bibliografia

[1] Kendall, D.G. (1974) Foundations of a Theory of Random Sets in Stochastic Geometry, ed. E.F. Harding and D.G. Kendal, Willey, pp. 322–376.
[2] Kucharczak, J. i Urbanik, K. (1974) Quasi-Stable functions, Bulletin of Polish Academy of Sciences, Mathematics., 22(3),pp. 263-268.
[3] Misiewicz, J.K., Oleszkiewicz, K. i Urbanik, K., (2005) Classes of measures closed under mixing and convolution. Weak stability., Studia Math., 167(3), pp. 195–213.
[4] Misiewicz, J.K., (2006) Weak stability and generalized weak convolution for random vectors and stochastic processes, IMS Lecture Notes-Monoghaph Series Dynamics & Stochastics, Vol.48, pp. 109–118.
[5] Urbanik, K. (1988) Analytical Methods in Probability Theory. Transactions of the tenth Praque Conference on Information Theory, Statistical decision functions, Random Processes., pp. 151–169.
[6] Urbanik, K. (1964) Generalized convolutions., Studia Math., 23, pp. 217-245.
[7] Urbanik, K. (1986) Generalized convolutions IV., Studia Math., 83, pp. 57-95.
[8] Urbanik, K. (1987)) A counterexample on generalized convolutions., Colloquium Math., 54(1), pp. 143-147.
[9] Urbanik, K. (1976) Remarks on $\mathcal{B}$-stable Probability Distributions., Bulletin of Polish Academy of Sciences, Mathematics, 24(9), pp. 783-787.

Rafał Kapica
Uniwersytet Śląski
Janusz Morawiec
Uniwersytet Śląski

O równaniach falek i szeregach zmiennych losowych

Równania falek pojawiają się naturalnie przy konstrukcji baz ortonormalnych przestrzeni L^2.
Nawiązując do [4], rozważać będziemy równanie falek postaci $f(x) = \int_\Omega |L(\omega)| f(L(\omega) - M(\omega))P(d\omega)$, wskazując na jego związek z szeregami zmiennych losowych typu $\sum_{n=1}^\infty \eta_n \prod_{k=1}^{n-1} \xi_k$.
W przypadku dyskretnym, charakteryzację istnienia L^1-rozwiązań równania falek $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{n,1} f(kx-n) + \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{n,-1} f(-kx-n)$, z parametrem $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, można wyrazić w języku zbiorów blokujących [2], [3].

Bibliografia

[1] Kapica, R., Morawiec, J., (2008), *Probability distribution functions of the Grincevičjus series*, J. Math. Anal. Appl., 342, 1380-1387
[2] Kapica, R., Morawiec, J., *Refinement equations and Grincevičjus series*, maszynopis
[3] Protasov, V., (2005), *Refinement equations with nonnegative coefficients*, J. Fourier Anal. Appl. 309, 307-312
[4] Shouzhi, Y., Youfaa, L., (2007), *Two-direction refinable functions and two-direction wavelets with dilation factor m*, Appl. Math. Comput., 188, 1908-1920

Joanna Karłowska-Pik
Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Własność stowarzyszenia dla nieskończenie podzielnych zbiorów losowych

Celem komunikatu jest omówienie wyników zawartych we wspólnej pracy z Tomaszem Schreiberem [1].

Element losowy $X \in \mathbb{S}$, gdzie $(\mathbb{S}, \mathcal{F}_{\mathbb{S}})$ jest dowolną przestrzenią mierzalną z porządkiem częściowym $\preceq$, jest *stowarzyszony*, jeśli

$$Cov(f(X), g(X)) \geq 0$$

dla wszystkich $\preceq$-niemalejących funkcji $f, g : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$, dla których kowariancja jest dobrze zdefiniowana.

Badamy warunki konieczne i dostateczne stowarzyszenia dla wypukłych i zwartych losowych podzbiorów $\mathbb{R}^d$ (z inkluzją zbiorów jako częściowym porządkiem), nieskończenie podzielnych względem sum Minkowskiego ($A \oplus B = \{x + y; x \in A, y \in B\}$). Podobnie jak nieskończenie podzielne wektory losowe, zbiory takie posiadają reprezentację Lévy'ego-Chinczyna, co z grubsza mówiąc oznacza, że dają się przedstawić w postaci sumy Minkowskiego zbioru deterministycznego, gaussowskiego wektora losowego oraz złożonego zbioru Poissona z miarą intensywności będącą miarą Lévy'ego. Warunkiem dostatecznym dla stowarzyszenia okazuje się być skoncentrowanie miary Lévy'ego na rodzinie zbiorów zawierających 0 i (co jest istotną różnicą w stosunku do wektorów losowych) brak składowej gaussowskiej. Warunek ten jest również warunkiem koniecznym dla stowarzyszenia procesu stochastycznego o wartościach będących zbiorami losowymi.

Pokazujemy także, że każdy losowy zbiór domknięty nieskończenie podzielny względem sum teoriomnogościowych i każdy losowy wypukły i zwarty zbiór nieskończenie podzielny ze względu na otoczki wypukłe sum teoriomnogościowych są stowarzyszone.

Bibliografia

[1] J. Karłowska-Pik, T. Schreiber, *Association criteria for M-infinitely-divisible and U-infinitely-divisible random sets*, ukaże się w Probab. Math. Statist. 28.2 (2008)

Anna Karpowicz
Instytut Matematyki i Informatyki, Politechnika Wrocławska
Krzysztof Szajowski
Instytut Matematyki i Informatyki, Politechnika Wrocławska

Dwukrotne zatrzymanie w problemie połowu

Jednym z pierwszych autorów, który rozważał najprostszą wersję *zagadnienia połowu* był Starr [2]. Szczegółowego przeglądu tej tematyki dokonał Ferguson [1]. W referacie zostanie zaprezentowane uogólnienie tego problemu polegające na tym, iż dopuszczamy możliwość zmiany parametrów modelu. Ma to na celu modelowanie świadomego zastosowania innej techniki połowu lub przejścia na inne stanowisko. Wędkarz może zmienić miejsce lub technikę połowu w dowolnej chwili s przed upływem ustalonego horyzontu t_0. Ryby łowione są zgodnie z pewnymi procesami odnowy $\{N_i(t), t \geq 0\}$, gdzie $N_i(t)$ odpowiada liczbie ryb złowionych w czasie t na miejscu (lub metodą) $i = 1, 2$. Czasy pomiędzy kolejnymi złowieniami na stanowisku i tworzą ciąg niezależnych zmiennych losowych $S_{i,1}, S_{i,2}, \ldots$ o rozkładzie F_i. Wagi ryb natomiast opisane są ciągiem zmiennych losowych $X_{i,0}, X_{i,1}, X_{i,2}, \ldots$ o rozkładzie H_i. Całkowita waga ryb złowionych do momentu t jeżeli zmiana (miejsca, techniki) nastąpiła w chwili s dana jest wzorem:

$$M_t^s = \sum_{n=1}^{N_1(s \wedge t)} X_{1,n} + \sum_{n=1}^{N_2((t-s)^+)} X_{2,n} = M_{t \wedge s} + \sum_{n=1}^{N_2((t-s)^+)} X_{2,n}.$$

Miarą satysfakcji wędkarza jest różnica pomiędzy funkcją użyteczności $g_i : [0, \infty) \to [0, G_i]$ zależną od wagi ryb a funkcją kosztów $c_i : [0, t_0] \to [0, C_i]$ zależną od czasu. Na każdym z dwóch miejsc funkcje kosztów i użyteczności są różne.

Wypłata (zadowolenie) wędkarza w sytuacji, gdy zmiana nastąpiła w chwili s a połów został zakończony w chwili t wynosi:

$$Z(s,t) = \begin{cases} g_1(M_t) - c_1(t) & \text{gdy } t < s \leq t_0, \\ g_1(M_s) - c_1(s) + g_2(M_t^s - M_s) - c_2(t-s) & \text{gdy } s \leq t \leq t_0, \\ -(C_1 + C_2) & \text{gdy } t_0 < t. \end{cases}$$

Celem jest maksymalizacja wypłaty w czasie t_0. Musimy zatem zdecydować, kiedy powiniśmy dokonać zmiany miejsca (lub metody) i kiedy opuścić łowisko. Problem opisany powyżej sprowadza się do wyznaczenia dwóch momentów zatrzymania: momentu zmiany τ_1^* i zakończenia połowu τ_2^* takich, że oczekiwana wypłata jest maksymalizowana

$$EZ(\tau_1^*, \tau_2^*) = \sup_{\tau_1, \tau_2} EZ(\tau_1, \tau_2).$$

Otrzymano postać optymalnej wypłaty i optymalne momenty zatrzymania.

Bibliografia

[1] T. Ferguson. A Poisson Fishing Model. *In: Festschrift for Lucien Le Cam: Research Papers in Probability and Statistics (D. Pollard, E. Torgersen and G. Yang, eds.)*, Springer, New York, 1997.
[2] N. Starr. Optimal and adaptive stopping based on capture times. *J. Appl. Prob.*, 11:294 – 301, 1974.

Przemysław Klusik
Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski, Wrocław
Zbigniew Palmowski
Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski, Wrocław

Zabezpieczanie instrumentów pochodnych przy wykorzystaniu dodatkowych informacji

Rozważmy rynek finansowy zupełny. Koszt idealnej replikacji instrumentu pochodnego typu europejskiego jest wówczas równy wartości oczekiwanej wypłaty w równoważnej mierze martyngałowej.

Firma ubezpieczeniowa oferuje swoim klientom klientom instrumenty pochodne, przy czym wypłata jest dodatkowo warunkowana dożyciem do chwili wypłaty. Z powodu dodatkowego warunku firma nie może liczyć na składkę pozwalającą na idealną replikację.

Pokażemy, jaka jest strategia minimalizująca prawdopodobieństwo straty, przy założeniu, że firma dysponuje dodatkową informacją, która nie jest publicznie dostępna (jest tzw. insiderem). Głównym narzędziem w dowodach jest twierdzenie o reprezentacji martyngałowej dla rozszerzonej filtracji. Referat jest rozwinięciem prac [1] i [2].

Bibliografia

[1] Hans Föllmer, Peter Leukert (1999) Quantile hedging, *Finance and Stochastics* 3, 251-273.
[2] Jürgen Amendinger (2000) Martingale representation theorem for initially enlarged filtrations, *Stochastic Processes and their Applications*, 89, 101-116.

Łukasz Kruk
Instytut Matematyczny UMCS, Lublin

Otwarta sieć kolejkowa o asymptotycznie stabilnym modelu fluidowym i niekonwencjonalnej aproksymacji dyfuzyjnej

Opierając się na twierdzeniu Yeunga i Lehoczky'ego z pracy [3] podamy prosty przykład sieci kolejkowej typu feedforward z protokołem obsługi FISFO (*first-in-system-first-out*), dla której przeskalowany dyfuzyjnie proces pozostałej do wykonania pracy, przy krytycznym obciążeniu wszystkich stacji (*heavy traffic*), jest słabo zbieżny do dyfuzji nie będącej odbitym ruchem Browna. O ile nam wiadomo, jest to pierwszy przykład otwartej sieci kolejkowej o niekonwencjonalnej aproksymacji dyfuzyjnej; podobny przykład dla sieci zamkniętych został podany przez Harrisona i Williams w pracy [2]. Co więcej, okazuje się, że każdy model fluidowy (hydrodynamiczny) rozważanej przez nas sieci i, ogólniej, sieci typu feedforward z protokołem EDF (*earliest-deadline-first*), jest asymptotycznie stabilny, tzn. przy czasie dążącym do nieskończoności jest zbieżny do stanu niezmienniczego. Wynika stąd, że sugerowane przez niektórych badaczy uogólnienie hipotezy Harrisona (*heavy traffic conjecture*), sformułowanej w pracy [1] dla sieci FIFO, do szerszej klasy protokołów obsługi, jest fałszywe już w przypadku protokołów o własności HL (*head-of-the-line*) w sieciach typu feedforward.

Bibliografia

[1] Harrison, J.M. (1995) Balanced fluid models of multiclass queueing networks: a heavy traffic conjecture, in: *Stochastic Networks*, IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Vol. 71, Springer-Verlag, New York, 1995, pp. 1–20.
[2] Harrison, J.M. and Williams, R.J. (1996) A multiclass closed queueing network with unconventional heavy traffic behavior, *Annals of Applied Probability* **6**, 1-47.
[3] Yeung, S.-N. and Lehoczky, J.P. (2001) Real-time queueing networks in heavy traffic with EDF and FIFO queue discipline, working paper, Department of Statistics, Carnegie Mellon University.

Rafał Kucharski
Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, Warszawa

O zabezpieczaniu opcji w czasie dyskretnym

W wystąpieniu zostanie przedstawiony algorytm wyceny i zabezpieczania opcji. Rozważany model z czasem dyskretnym jest znacznym uogólnieniem modelu CRR. Pokażemy, że do super-replikacji wystarcza jedynie znajomość nośników rozkładów cen akcji. Rezultaty uzyskane za pomocą elementarnych technik analizy wypukłej mają intuicyjną interpretację — pokazujemy, że ceny sprzedającego i kupującego mogą być obliczane jako wartości odpowiednio wklęsłej i wypukłej otoczki z funkcji wypłaty opcji. Zastosowane podejście pozwala na uwzględnienie w rozważaniach kosztów transakcyjnych.

Tadeusz Kulczycki
Instytut Matematyki i Informatyki, Politechnika Wrocławska

Oszacowania śladu dla procesów stabilnych

Rozważmy półgrupę ciepła dla izotropowego (niezmienniczego na obroty) procesu α-stabilnego w obszarach $D \subset \mathcal{R}^d$. Badamy zachowanie (zależne od czasu) śladu tej półgrupy. Dla klasycznej półgrupy ciepła (dla Laplasjanu z warunkiem brzegowym Dirichleta) problem ten jest znany jako: "Can one hear the shape of a drum?" zob. [5], [2], [3], [4]. Problem ten polega na znalezieniu zależności pomiedzy kształtem obszaru a spektrum Laplasjanu. Dla półgrupy ciepła dla izotropowego procesu α-stabilnego pokazaliśmy, że dla obszarów odpowiednio gładkich (klasy $C^{1,1}$) drugi składnik w rozwinięciu asymptotycznym śladu gdy $t \to 0$ zawiera powierzchnię brzegu obszaru $|\partial D|$. Jest to wynik podobny jak w przypadku klasycznej półgrupy ciepła.

Powyższe wyniki zostały otrzymane wspólnie z prof. R. Bañuelosem (Purdue University) w pracy [1].

Bibliografia

[1] R. Bañuelos, T. Kulczycki (2008) *Trace estimates for stable processes*, Probab. Theory Relat. Fields (to appear).
[2] M. van den Berg, (1987) *On the asymptotics of the heat equation and bounds on traces associated with Dirichlet Laplacian*, J. Funct. Anal. 71 , 279-293.
[3] J. Brossard, R. Carmona, (1986) *Can one hear the dimension of a fractal?* Comm. Math. Phys. 104, 103–122.
[4] R. M. Brown, (1993) *The trace of the heat kernel in Lipschitz domains*, Trans. Amer. Math. Soc. 339, 889–900.
[5] M. Kac (1966) *Can one hear the shape of a drum?* Amer. Math. Monthly 73, no. 4, part II, 1–23.

Mateusz Kwaśnicki
Instytut Matematyki i Informatyki Politechniki Wrocławskiej

Wartości własne półgrupy procesu Cauchy'ego na odcinku są co najwyżej dwukrotne

Jednym z najprostszych i najważniejszych przykładów skokowych procesów stochastycznych jest jednowymiarowy proces Cauchy'ego, czyli proces Markowa $(X_t)_{t\geq 0}$ o prawostronnie ciągłych trajektoriach i jednorodnym w czasie i przestrzeni prawdopodobieństwie przejścia o gęstości $p_t(x) = \frac{1}{\pi}\frac{t}{t^2+x^2}$. Pod wieloma względami (X_t) przypomina jednowymiarowy ruch Browna $(B_t)_{t\geq 0}$. Okazuje się jednak, że niektóre łatwe twierdzenia dotyczące ruchu Browna stają się zaskakująco trudne, gdy $B(t)$ zastąpimy procesem Cauchy'ego.

Niech $D = (-1,1)$ będzie odcinkiem i rozważmy półgrupę P_t^D procesu (X_t) zabitego przy wyjściu z D. Jeśli przez $\tau_D = \inf\{s \geq 0 : X_s \notin D\}$ oznaczymy czas pierwszego wyjścia z D, to $P_t^D f(x) = \mathbf{E}_x(t < \tau_D; f(X_t))$. Interesują nas wartości własne λ_n i funkcje własne φ_n półgrupy P_t^D. W przypadku półgrupy ruchu Browna zabitego przy wyjściu z odcinka D funkcje i wartości własne dane są jawnymi wzorami, $\tilde{\lambda}_n = (\frac{n\pi}{2})^2$, $\tilde{\varphi}_n(x) = \sin\frac{n\pi}{2}(x+1)$. Dla półgrupy procesu Cauchy'ego nie wiadomo nawet, czy wartości własne są jednokrotne. Głównym wynikiem przedstawionym w komunikacie jest twierdzenie o tym, że każdej wartości własnej odpowiadają nie więcej niż dwie liniowo niezależne funkcje własne — co najwyżej jedna symetryczna i jedna antysymetryczna.

Dowód powyższego twierdzenia wykorzystuje związek procesu Cauchy'ego z ruchem Browna na półpłaszczyźnie. Wykorzystane są pojęcia transformat Fouriera i Hilberta. Pośrednim wynikiem jest następująca tożsamość:

$$\iint \frac{f(x)g(y)}{|x|+|y|}\,dx\,dy = \frac{1}{2\pi}\iint \frac{\hat{f}(\xi)\hat{g}(\eta)}{|\xi|+|\eta|}\,d\xi\,d\eta,$$

prawdziwa dla dowolnych rzeczywistych funkcji $f, g \in L^2(\mathbf{R})$.

Zbigniew Łagodowski
Politechnika Lubelska

Mocne prawa wielkich liczb typu Brunka dla dyskretnych pól losowych o wartościach w przestrzeni Banacha

W wystąpieniu będą dyskutowane nierówności maksymalne dla rzeczywistych submartyngałów i ich zastosowanie do mocnych praw wielkich liczb dla dyskretnych pól losowych o wartościach w przestrzeni Banacha. Podana zostanie też charakteryzacja przestrzeni Rademachera typu p, $1 \leq p \leq 2$, przy użyciu warunku związanego z szybkością zbieżności w słabym prawie wielkich liczb. Sformułujemy też mocne prawo wielkich liczb zastepując warunek geometryczny (R-type) warunkiem probabilistycznym.

Rafał Latała
Instytut Matematyki UW i Instytut Matematyczny PAN

O pewnych nierównościach koncentracyjnych dla miar logarytmicznie wklęsłych

W pracy [2] Maurey wprowadził definicję własności (τ) dla pary (μ, φ), gdzie μ jest miarą probabilistyczą, a $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ funkcją kosztu:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{f\Box\varphi} d\mu \int_{\mathbb{R}^n} e^{-f} d\mu \le 1 \text{ dla } f \text{ mierzalnych, ograniczonych,} \tag{τ}$$

$$f\Box\varphi(x) := \inf\{f(x-y) + \varphi(y)\colon y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Maurey w szczególności wykazał, że symetryczny rozkład wykładniczy ν na $\mathbb{R}$ z funkcją kosztu $c \min\{|x|, x^2\}$ ma własność (τ) i otrzymał w ten sposób elegancki i prosty dowód nierówności koncentracyjnej Talagranda:

$$\forall_{A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}\ \nu^{\otimes n}(A) \ge \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ \nu^{\otimes n}(A + \sqrt{t}B_2^n + tB_1^n) \ge 1 - \frac{1}{2}e^{-t/C}. \tag{T}$$

Podczas odczytu zajmiemy się klasą miar probabilistycznych μ na $\mathbb{R}^n$, symetrycznych, logarytmicznie wklęsłych, które spełniają (τ) z największą możliwą funkcją kosztu, równą (z dokładnością do stałej):

$$\Lambda_\mu^*(x) = \sup_{t\in\mathbb{R}^n} \Big(\langle t, x\rangle - \ln \int e^{\langle t,y\rangle} d\mu(y)\Big).$$

Klasa ta zawiera wszystkie rozkłady produktowe logarytmicznie wklęsłe i rozkłady jednostajne na kulach l_p^n.

Przedyskutujemy nierówności koncentracyjne dla miar z omawianej klasy, uogólniające nierówność (T) i ich związek z niedawno otrzymanymi wynikami: centralnym twierdzeniem granicznym Klartaga [1] i oszacowaniami ogonów normy euklidesowej Paourisa [4].

Bibliografia

[1] Klartag, B. (2007) *A central limit theorem for convex sets*, Invent. Math. 168, 91–131.
[2] Latała, R., Wojtaszczyk, J.O. (2008), *On the infimum convolution inequality*, preprint, http://front.math.ucdavis.edu/0801.4036.
[3] Maurey, B. (1991), *Some deviation inequalities,* Geom. Funct. Anal. 1, 188–197.

[4] Paouris, G. (2006), *Concentration of mass on convex bodies*, Geom. Funct. Anal. 16, 1021–1049.

Krzysztof Łatuszyński
Szkoła Główna Handlowa, Instytut Ekonometrii, Warszawa
Witold Bednorz
Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski, Warszawa
Rafał Latała
Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski, Warszawa

Warunki konieczne i dostateczne dla centralnego twierdzenia granicznego dla ergodycznych łancuchów Markowa

Niech $(X_n)_{n\geq 0}$ będzie ergodycznym łańcuchem Markowa na $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X})$ o operatorze przejścia P i rozkładzie stacjonarnym π. Powiemy, że $(X_n)_{n\geq 0}$ jest ergodyczny, jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} \|P^n(x,\cdot) - \pi\|_{tv} = 0, \quad \text{dla każdego} \quad x \in \mathcal{X},$$

gdzie $\|\cdot\|_{tv}$ oznacza odległość pełnego wahania.

Dla łańcuchów ergodycznych można przeprowadzić konstrukcję łańcucha rozszczepionego ([2]), który będzie miał atom $\check{\alpha}$ o dodatniej mierze, a następnie zdefiniować $\sigma_{\check{\alpha}}(0), \sigma_{\check{\alpha}}(1), \ldots,$ jako momenty kolejnych wizyt w $\check{\alpha}$ (czasy regeneracji).

Niech ponadto $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją borelowską t.że $\pi g^2 < \infty$, oraz niech

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \bar{g}(X_i), \quad \text{gdzie} \quad \bar{g} = g - \int g d\pi.$$

Okazuje się, żę dla łańcuchów ergodycznych, warunkiem koniecznym i dostatecznym dla centralnego twierdzenia granicznego postaci

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, \sigma_g^2), \quad \text{przy} \quad n \to \infty,$$

gdzie $\sigma_g^2 < \infty$, jest całkowalność z kwadratem wycieczek pomiędzy regeneracjami.

Bibliografia

[1] Bednorz W., Latała R., Łatuszyński K. (2008). *A Regeneration Proof of the Central Limit Theorem for Uniformly Ergodic Markov Chains.* Electronic Communications in Probability, 13, 85–98.
[2] Nummelin E. (1978). A splitting technique for Harris recurrent chains. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Geb.* **43** 309–318.

Rafał Łochowski
Szkoła Główna Handlowa

O uciętej 1-wariacji ruchu Browna

W referacie przedstawimy uniwersalne oszacowania (z dokładnością do uniwersalnej stałej) wartości oczekiwanej *uciętej 1-wariacji, na poziomie* $c > 0$, $V^c[a,b]$, dla ruchu Browna W_t z dryfem μ, którą definiujemy w następujący sposób:

$$V^c[a,b] = \sup_n \sup_{a \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leq b} \sum_{i=1}^{n-1} \max\left\{ \left| W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \right| - c, 0 \right\}.$$

Ucięta 1-wariacja, w przeciwieństwie do 1-wariacji ruchu Browna, jest wielkością p.n. skończoną. Najciekawsze jest to, że przy zmianie parametru c obserwuje się efekt "przejścia fazowego". Podana zostanie również pewna interpretacja uciętej 1-wariacji w matematyce finansowej.

Bibliografia

[1] Atiya A. F. et al. (2004) *On a maximum drawdown of a Brownan motion*, J. Appl. Probab. **41**.
[2] Taylor, H. M. (1975) *On a stopped Brownian motion formula*, Ann. Probab. **3**.

Jacek Małecki
Instytut Matematyki i Informatyki Politechniki Wrocławskiej

Potencjały Bessela, rozkłady trafienia i funkcje Greena

Referat bazuje na wynikach pracy:
"Bessel potentials. hitting distributions nad Green functions",
T. Byczkowski, J. Małecki, M. Ryznar; Trans. Amer. Math. Soc. (2007) (przyjęta do druku)

Rozważamy teorię potencjału operatora $(I - \Delta)^{\alpha/2}$, $0 < \alpha < 2$, gdzie Δ jest operatorem Laplace'a na $\mathbb{R}^d$. Operator (formalnie) odwrotny $J_\alpha = (I - \Delta)^{-\alpha/2}$ jest nazywany *operatorem potencjału Bessela*, który posiada reprezentację całkową ze splotowym jądrem całkowym postaci

$$\frac{2^{1-(d+\alpha)/2}}{\Gamma(\alpha/2)\pi^{d/2}} \frac{K_{(d-\alpha)/2}(|x|)}{|x|^{(d-\alpha)/2}},$$

gdzie K_μ jest zmodyfikowaną funkcją Bessela trzeciego rodzaju. Potencjały Bessela J_α dla $0 < \alpha < 2$ mogą być analizowane w języku procesów stochastycznych. Dokładniej, operator $H_\alpha = I-(I-\Delta)^{\alpha/2}$ jest generatorem infinitezymalnym relatywistycznego procesu α-stabilnego, natomiast potencjały Bessela są jądrami 1-rezolwenty półgrupy związanej z tym procesem.

Oznaczmy przez $\mathbb{H} = \{(x_1,\dots,x_d); x_d > 0\}$ górną półprzestrzeń w $\mathbb{R}^d$, natomiast $P_{\mathbb{H}}(x,u)$ niech oznacza jądro Poissona dla $\mathbb{H}$, tzn. gęstość miary harmonicznej półprzestrzeni dla operatora $(I-\Delta)^{\alpha/2}$. Głównym rezultatem prezentowanej pracy jest poniższa formuła na jądro Poissona półprzestrzeni dla $(I-\Delta)^{\alpha/2}$:

$$P_{\mathbb{H}}(x,u) = \frac{2}{\pi}\frac{\sin(\pi\alpha/2)}{(2\pi)^{d/2}}\left(\frac{x_d}{-u_d}\right)^{\alpha/2}\frac{K_{d/2}(|x-u|)}{|x-u|^{d/2}}, \quad u_d < 0 < x_d.$$

Drugim wynikiem jest wyznaczenie postaci funkcji Greena półprzestrzeni dla $(I-\Delta)^{\alpha/2}$:

$$G_{\mathbb{H}}(x,y) = \frac{2^{1-\alpha}|x-y|^{\alpha-d/2}}{(2\pi)^{d/2}\Gamma(\alpha/2)^2}\int_0^{\frac{4x_dy_d}{|x-y|^2}}\frac{t^{\frac{\alpha}{2}-1}}{(t+1)^{d/4}}K_{d/2}(|x-y|(t+1)^{1/2})dt, \quad x,y\in\mathbb{H}.$$

Znajomość powyższych wzorów pozwala wyznaczyć jądro Poissona i funkcję Greena półprzestrzeni dla niezmienniczego na obroty procesu α-stabilnego. Ten alternatywny dowód nie wykorzystuje transformaty Kelvine'a.

Bibliografia

[1] Aronszajn, N., and Smith, K. T. (1961) Theory of Bessel potentials. I.
[2] Blumenthal, R. M., Getoor, R. K., and Ray, D. B. (1961) On the distribution of first hits for the symmetric stable processes.
[3] Gradstein, I. S., and Ryzhik, I. M. (2000) Table of integrals, series and products.
[4] Grzywny, T., and Ryznar, M. (w druku) Optimal estimates of Green function of half-spaces for relativistic process.
[5] Ryznar, M. (2002) Estimate of Green function for relativistic α-stable processes.
[9] Stein, E. M. (1970) Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions.

Przemysław Matuła, Iwona Stępień
Instytut Matematyki, Uniwersytet Marii Curie–Skłodowskiej, Lublin

Słaba zbieżność iloczynów sum niezależnych, dodatnich zmiennych losowych o różnych rozkładach

Niech $(X_n)_{n\in N}$ będzie ciągiem dodatnich, niezależnych zmiennych losowych, całkowalnych z kwadratem. Oznaczmy $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $\sigma_n^2 = Var(S_n)$, $\tau_k^2 = Var(X_k)$. W referacie zostaną przedstawione warunki wystarczające na zbieżność:

$$Z_n(t) := \left(\prod_{i=1}^{m_n(t)}\left(\frac{S_i}{ES_i}\right)^{\frac{\tau_{i+1}^2 ES_i}{\sigma_i^2}}\right)^{\frac{1}{\sigma_n}} \xrightarrow{d} \exp\left(\int_0^t \frac{W(x)}{x}dx\right)$$

w przestrzeni $D[0,1]$, gdy $n \to \infty$, gdzie $m_n(t) = \max\{i : \sigma_i^2 \le t\sigma_n^2\}$. Otrzymane wyniki rozszerzają i uogólniają pewne rezultaty z prac [1] i [2].

Bibliografia

[1] G. Rempała, J. Wesołowski, Asymptotics for products of sums and U–statistics, *Elect. Comm. in Probab.* **7** (2002), 47–54.
[2] Li-Xin Zhang, Wei Huang, A note on the invariance principle of the product of sums of random variables, *Elect. Comm. in Probab.* **12** (2007), 51–56.

Wojciech Matysiak
Politechnika Warszawska, Warszawa

Wolny harness kwadratowy

Kwadratowe harnessy to klasa procesów stochastycznych o liniowych warunkowych wartościach oczekiwanych i kwadratowych drugich momentach warunkowych. Klasa ta zawiera szereg ważnych procesów: procesy Wienera, Poissona, Gamma, Pascala, a także pewne procesy pojawiające się przy niekomutatywnych uogólnieniach procesów Levy'ego; w ostatnich latach pojawiło się także kilka nowych konstrukcji ([1]–[5]). Okazuje się, że klasa harnessów kwadratowych jest w naturalny sposób sparametryzowana i że we wszystkich znanych dotychczas przykładach co najmniej jeden parametr znika. Celem referatu jest przedstawienie konstrukcji takiego harnessa, dla którego wszystkie stałe w naturalnej parametryzacji sa niezerowe. Dodatkowo pokazana zostanie systematyczna metoda znajdowania pewnych wielomianów ortogonalnych, używanych do konstrukcji kwadratowych harnessów. Prezentowane wyniki otrzymano z W. Brycem i J. Wesolowskim.

Bibliografia

[1] Bryc, W., Wesołowski, W. (2005) Conditional moments of q-Meixner processes. Probability Theory and Related Fields, 131:415–441.
[2] Bryc, W., Wesołowski, J. (2007) Bi-Poisson process. Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, Vol. 10, No. 2 277-291.
[3] Bryc, W., Wesołowski, W. (2007) Classical bi-Poisson process: an invertible quadratic harness. Statistics and Probability Letters, 76:1664–1674.
[4] Bryc, W., Matysiak, W., Wesołowski, J. (2007) Quadratic harnesses, q-commutations, and orthogonal martingale polynomials. Transactions of the AMS 359, no. 11, 5449–5483.
[5] Bryc, W., Matysiak, W., Wesołowski, J. (2008) The bi-Poisson process - a quadratic harness. Annals of Probability 36, 623–646.

Krzysztof Michalik
Instytut Matematyki i Informatyki Politechniki Wrocławskiej

Przestrzenie Hardy'ego funkcji α-harmonicznych na ograniczonych obszarach gładkich

Rozpatrujemy funkcje u, które są α-harmoniczne na ograniczonym obszarze D o gładkim brzegu i zerują się poza obszarem. Jeśli u jest nieujemna to przyjmuje ona reprezentację Martina, tzn. $u(x) = M\mu = \int_{\partial D} M(x,z)\mu(dz)$, gdzie μ jest skończoną miarš na brzegu D, a funkcja M jest zwana jądrem Martina zbioru D. Reprezentacja ta jest odpowiednikiem reprezentacji Poissona dla klasycznych funkcji harmonicznych. Powstaje pytanie czy reprezentacja Martina ma miejsce w przypadku funkcji o dowolnych znakach. Zagadnienie to prowadzi do α-stabilnej wersji klasycznych przestrzeni Hardy'ego funkcji harmonicznych. Przestrzenie te ($H^p_\alpha, p \geq 1$) uzyskujemy poprzez odpowiednie normowanie funkcji α-harmonicznych. Następnie badamy własności tych przestrzeni w kontekście wartości brzegowych funkcji α-harmonicznych. Uzyskane rezultaty sa analogiczne jak w przypadku klasycznym tzn. $\alpha = 2$. Pokazujemy, że $u \in H^1_\alpha \Leftrightarrow u = M\mu$ dla pewnej jednoznacznej miary znakowanej μ o skończonym wahaniu. Ponadto dla $p > 1$, $u \in H^p_\alpha \Leftrightarrow u = M\mu$, a miara μ jest absolutnie ciągła względem miary powierzchniowej brzegu zbioru i jej gęstosc należy do przestrzeni funkcyjnej L^p. Pokazujemy także równoważność norm przestrzeni Hardy'ego i norm wspomnianych przestrzeni miarowych (funkcyjnych). Dowody tych wyników opierają się na własnościach jądra Martina przy brzegu D, nierówności Höldera oraz zbieżności niestycznej funkcji α-harmonicznych na obszarach regularnych.

Bibliografia

[1] C. Fefferman, E. M. Stein, *H^p spaces of several variables*, ActaMath. 129(1972), 137–193.
[2] E. M. Stein, *Boundary behaviour of holomorphic functions of several complex variables*, Princeton University Press, Princeton, 1972.
[3] E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press, Princeton, 1993.
[4] K. Michalik, M. Ryznar, *Hardy spaces for α-harmonic functions in smooth domains*, 2008, wysłane do druku.

Zbigniew Michna
Katedra Matematyki i Cybernetyki
Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu
Wrocław

Wartość średnia całki stochastycznej względem α-stabilnego szumu

Rozpatrujemy proces Lévy'ego pod warunkiem $\Gamma_1 = x$, gdzie $\{\Gamma_k\}$ jest ciągiem czasów przybyć dla procesu Poissona z jednostkową intensywnością. Pokazujemy, że pod tym warunkiem proces Lévy'ego może być przedstawiony jako suma prostego procesu i procesu Lévy'ego. Procesy te są niezależne. Jako zastosowanie tej dekompozycji rozważamy α-stabilny proces Lévy'ego. Podajemy pewną zamkniętą postać procesu $X(t) = \int_0^t Z(s-)\,dZ(s)$ i obliczamy jego wartość oczekiwaną, gdzie Z jest α-stabilnym procesem Lévy'ego z $0 < \alpha < 2$. Pokazujemy, że $\mathbb{E}X(t) = 0$ dla $1 < \alpha < 2$ i ta średnia jest równa nieskończoności dla $\alpha \leq 1$.

Bibliografia

[1] Michna, Z. (2007) Approximation of a symmetric α-stable Lévy process by a Lévy process with finite moments of all orders. Studia Mathematica **180**, 1–10.
[2] Michna, Z., Weron, A. (2007) Asymptotic behavior of the finite time ruin probability of a gamma Lévy process. Acta Physica Polonica B **38**, 1881-1889.
[3] Michna, Z. (2008) On the mean of a stochastic integral with non-Gaussian α-stable noise. Ukaże się w Stochastic Analysis and Applications.

Piotr Miłoś
Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, Warszawa

Fluktuacje czasów przebywania dla pewnych układów cząstek z imigracją

Rozpatrujemy układ cząstek w $\mathbb{R}^d$. Każda poruszają się niezależnie od innych zgodnie ze standardowym procesem α-stabilnym. Po czasie losowym (wykładniczym) z równymi prawdopodobieństwami cząstka ginie lub dzieli się na dwie, które poruszają się i dzielą niezależnie, zgodnie z tym samym mechanizmem. Konfiguracja początkowa układu dana jest przez jednorodną punktową miarę Poissona na $\mathbb{R}^d$. Ponadto do układu przybywają cząstki "z zewnątrz"; mechanizm imigracji jest losowy i jest opisany przez jednorodną w czasie i przestrzeni miarę punktową Poissona na $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$. Stan układu opisany jest przez

proces empiryczny N, gdzie $N_t(A)$ to (losowa) liczba cząstek w zbiorze A w chwili t. Badamy fluktuacje przeskalowanego czasu przebywania tj. proces dany wzorem

$$X_T(t) = \frac{1}{F_T} \int_0^{Tt} (N_s - EN_s)\, ds,$$

gdzie F_T jest normowaniem wybranym w ten sposób, by otrzymać nietrywialną granicę X_T przy $T \to +\infty$.
Granica zależy od wymiaru przestrzeni d i indeksu stabilności α. W najciekawszym przypadku "wymiarów pośrednich i małych", $d < 2\alpha$ otrzymujemy granicę, której struktura przestrzenna dana jest przez proces gaussowski z zależnościami dalekigo zasięgu.

Bibliografia

[1] Miłoś, P. (2008) Twierdzenia graniczne fluktuacji procesów przebywania dla układów gałązkowych. Rozprawa doktorska.

Jolanta K. Misiewicz
Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonometrii, Uniwersytet Zielonogórski
Witold Jarczyk
Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonometrii, Uniwersytet Zielonogórski

O słabej uogólnionej stabilności i (c,d)-semistabilnych zmiennych losowych w języku równań funkcyjnych

Zmienna X i jej rozkład μ jest słabo stabilna jeśli dla dowolnych $a, b \in R$ istnieje zmienna losowa θ taka, że $aX + bX' \stackrel{d}{=} \theta X$, gdzie X' jest niezaleńą kopią X. Stałe a, b mońa zastąpić zmiennymi losowymi. Kada słabo stabilna zmienna losowa definiuje słaby splot uogólniony miar λ_1, λ_2 wzorem $\lambda_1 \oplus \lambda_2 = \mathcal{L}(\Theta)$, gdzie

$$\Theta_1 X + \Theta_2 X' \stackrel{d}{=} \Theta X, \quad \mathcal{L}(\Theta_1) = \lambda_1, \mathcal{L}(\Theta_2) = \lambda_2,$$

a wszystkie występujące tu zmienne są niezależne. Zajęliśmy się badaniem rozkładów stabilnych w sensie słabego splotu uogólnionego, co doprowadziło do następującego równania funkcyjnego:

$$\forall\, r, s \geq 0\, \exists c = c(r, s) \geq 0\, \exists\, d = d(r, s) \in R\, \forall\, t \in R \quad \varphi(rt)\varphi(st) = \varphi(ct)\psi(dt).$$

Równanie to należy rozwiązać w zbiorze funkcji charakterystycznych takich, że $\varphi(t) = \int \psi(tu)\lambda(du)$ dla pewnej miary λ. Rozważamy następujące przypadki:

1) miary ściśle stabilne: $d(r, s) = 0\, \forall\, r, s > 0$;

2) miary p-samorozkładalne: $\exists\, r > 0 \quad d(r, 0) > 0$ lub $d(0, r) > 0$;

3) miary semi-stabilne: $d(r, s) = 0$ dla pewnego $r, s > 0$;

4) miary (c, d)-pseudostabilne: $d(r, s) > 0 \,\forall\, r, s > 0$.

Bibliografia

[1] Jarczyk, W. (1991). *A recurrent method of solving iterative functional equations*, Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach, 1206, Uniwersytet Śląski, Katowice.
[2] Misiewicz, J.K., and Mazurkiewicz, G. (2005) *On (c, p)-pseudostable random variables.* J. Theoret. Probab. 18(4), 837–852.
[3] Misiewicz, J.K., Oleszkiewicz, K., and Urbanik, K. (2005). *Classes of measures closed under mixing and convolution. Weak stability*, Studia Math. 167 (3), 195–213.
[4] Urbanik, K. (1964). *Generalized convolutions*, Studia Math. 23, 217–245.

Mariusz Niewęgłowski
Wydział MiNI, Politechnika Warszawska
Jacek Jakubowski
Wydział MIM, Uniwersytet Warszawski
Wydział MiNI, Politechnika Warszawska

Zabezpieczanie wypłat wrażliwych na rating kredytowy

Problem replikacji instrumentów z ryzykiem kredytowym jest przedmiotem intensywnych badań w ostatnich latach (patrz Bielecki, Jeanblanc i Rutkowski [1,2] oraz Blanchet-Scalliet i Jeanblanc [3]). W referacie poruszymy problem replikacji wypłat związanych z ratingiem kredytowym, który, o ile nam wiadomo nie był dotychczas badany. Zakładając, że proces ratingu kredytowego jest podwójnie stochastycznym proces Markowa (Jakubowski, Niewęgłowski [4]), udowodnimy twierdzenie o reprezentacji martyngałowej dla pewnej klasy zmiennych losowych. Twierdzenie to pozwala skonstruować strategie samofinansujące replikujące wypłaty zależne od ratingu kredytowego. W szczególności rozważymy wypłaty które zależą od ratingu w momencie wygaśnięcia instrumentu oraz wypłaty w momencie wystąpienia bankructwa (defaultu). Przedstawimy również wyniki dotyczące replikacji ogólnych wypłat wrażliwych na rating kredytowy.

Bibliografia

[1] Bielecki, T.R., Jeanblanc, M., Rutkowski, M.: Hedging of Credit Derivatives in Models with Totally Unexpected Default. Stochastic processes and applications to mathematical finance, Proceedings of the 5th Ritsumeikan International conference, World Scientific (2006).

[2] Bielecki, T.R., Jeanblanc, M., Rutkowski, M.: Pricing and trading credit default swaps in a hazard process model. Submitted (2007).
[3] Blanchet-Scalliet, C., Jeanblanc, M.: Hazard rate for credit risk and hedging defaultable contingent claims. Finance and Stochastics 8, 145-159 (2004).
[4] Jakubowski, J., Niewęgłowski, M. (2008) Valuation of defaultable rating-sensitive claims under DSMC. Working Paper.
[5] Jakubowski, J., Niewęgłowski, M. (2008) Hedging of defaultable rating-sensitive claims. Working Paper.

Krzysztof Oleszkiewicz
Instytut Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego

Dokładne oszacowania ogonów iloczynów i sum niezależych zmiennych losowych

Omówione zostaną warunki konieczne i wystarczające do tego, by rzeczywista zmienna losowa X miała następującą własność:

$$\forall_{t\geq 0}\ P(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k > t) \leq Ce^{-t^2/2}/(1+t)$$

dla każdej liczby naturalnej n i dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, \ldots, a_n$ takich, że $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 =$ 1 - $X_1, X_2, \ldots$ oznaczają tu niezależne kopie zmiennej X. Hipoteza Eatona, mówiąca, że symetryczna zmienna losowa Bernoulliego $X = \pm 1$ ma tę własność, została udowodniona przez I. Pinelisa, a następnie (z dużo prostszym dowodem) przez S. Bobkowa.

Adam Osękowski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Nierówności martyngałowe i problemy brzegowe

Niech $(Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną wyposażoną w filtrację $(\mathcal{F}_n)$. Niech f, g będą ciągami adaptowanymi względem tej filtracji, o ciągach różnic df, dg zadanych przez równości

$$f_n = \sum_{k=0}^{n} df_k, \quad g_n = \sum_{k=0}^{n} dg_k, \quad , n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots.$$

Mówimy, że ciąg g jest *silnie dominowany* przez ciąg f, jeśli z prawdopodobieństwem 1 mamy

$$|dg_n| \leq |df_n|, \qquad n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots.$$

Ponadto, ciąg g jest *bardzo silnie dominowany* przez f, jeśli g jest silnie dominowany przez f oraz, z prawdopodobieństwem 1,

$$\mathbb{E}(|dg_n|\,|\mathcal{F}_{n-1}) \le \mathbb{E}(|df_n|\,|\mathcal{F}_{n-1}), \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Celem odczytu jest przegląd nierówności porównujących wielkości f oraz g przy założeniu silnej bądź bardzo silnej dominacji oraz dodatkowym warunku, iż ciąg f jest pod-, nad- bądź martyngałem. Nierówności te wiążą się z problemami brzegowymi na $\mathbb{R}^2$. Omówimy także ciągłe wersje silnej oraz bardzo silnej dominacji oraz wynikające z nich nierówności dla funkcji harmonicznych określonych na obszarach w $\mathbb{R}^d$.

Bibliografia

[1] Bañuelos R. and Wang G. (1995), Sharp inequalities for martingales with applications to the Beurling-Ahlfors and Riesz transformations.
[2] Burkholder, D. L. (1984), Boundary value problems and sharp inequalities for martingale transforms.
[3] Burkholder, D. L. (1993), Strong differential subordination and stochastic integration.
[4] Suh, Y. (2004), A sharp weak type (p,p) inequality $(p>2)$ for martingale transforms and other subordinate martingales.
[5] Wang, G. (1995) Differential subordination and strong differential subordination for continuous time martingales and related sharp inequalities.

Jan Palczewski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Optymalne stopowanie z nieciągłymi funkcjonałami

Rozważmy problem optymalnego stopowania procesu Markowa $X(t)$ z czasem ciągłym:

$$v(x,b,T) = \sup_{\tau \le T} \mathbb{E}^x \big\{ F\big(\tau, X(\tau), b\big) \big\},$$

gdzie b jest parametrem z przestrzeni lokalnie zwartej. Własności funkcji wartości v oraz istnienie optymalnego momentu zatrzymania τ^* w przypadku funkcji ciągłej i ograniczonej F były przedmiotem intensywnych badań na przełomie lat siedemdziesiątych i osiemdziesiątych: funkcja wartości v jest ciągła, a optymalny moment stopu τ^*, w formie pierwszego momentu wejścia do pewnego zbioru, istnieje dla każdego x, b. Późniejsze wyniki związane były z różniczkową charakteryzacją funkcji wartości i badaniu jej gładkości. Nieliczne prace zajmujące się nieciągłą funkcją F prezentowały wyniki cząstkowe, często nie dowodząc istnienia optymalnego momentu zatrzymania. Nie jest to skutek małej użyteczności takich badań, lecz raczej trudności tematyki.

W komunikacie przedstawię wyniki dotyczące problemu stopowania, który pojawił się w czasie badania optymalnego sterowania z opóźnieniem wykonania impulsu i z minimalnym czasem pomiędzy kolejnymi impulsami. Nieciągłości funkcji F związane są z argumentem czasu t; odwzorowanie $t \mapsto F(t, x, b)$ posiada nieciągłości (zależne od parametru b), zaś $x \to F(t, x, b)$ jest ciągłe. Pokażę, że w zależności od rodzaju nieciągłości funkcja wartości "wygładza" albo "dziedziczy" nieciągłości po funkcji F. Wykażę również istnienie optymalnego momentu stopu τ^*. W przeciwieństwie do wszechobecnej tendencji do używania metod różniczkowych, nasze wyniki zostały uzyskane poprzez aproksymację dyskretnymi problemami stopowania. Pozwoliło to na udowodnienie twierdzeń w znacznie większej ogólności.

Prezetowanie wyniki pochodzą ze wspólnych prac z Łukaszem Stettnerem.

Zbigniew Palmowski
Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski, Wrocław
Florin Avram i Martijn Pistorius
Universite de Pau i King's College London

Zagadnienie ruiny dla dwuwymiarowego procesu ryzyka

Rozważamy dwie firmy ubezpieczeniowe, które dzielą wpływy i roszczenia w ustalonej proporcji. Interesować nas będą prawdopodobieństwa wyjścia dwuwymiarowego procesu ryzyka (lub ogólniej dwuwymiarowego procesu Lévy'ego) z dodatniej ćwiartki lub wejścia do ujemnej ćwiartki. Skoncentrujemy się na znalezieniu ich asymptotyk kiedy rezerwy obu firm (warunki początkowe) uciekają do nieskończoności wzdłuż ustalonej prostej. Kluczową obserwacją jest fakt, że rozważane prawdopodobieństwa są równoważne prawdopodobieństwu, że subordynator przekroczy kawałkami liniową barierę. W dowodzie wykorzystuje się nowe asymptotyczne twierdzenia dla prawdopodobieństwa ruiny dowolnego procesu Lévy'ego na skończonym horyzoncie czasowym. Referat oparty jest na pracach [1-3].

Bibliografia

[1] Avram, F., Palmowski, Z. i Pistorius, M. (2008) Exit problem of a two-dimensional risk process from a cone: exact and asymptotic results. Ukaże się w *Annals of Applied Probability.*
[2] Avram, F., Palmowski, Z. i Pistorius, M. (2008) A two-dimensional ruin problem on the positive quadrant. *Insurance: Mathematics and Economics* **42(1)**, 227-234.
[3] Palmowski, Z. i Pistorius, M. (2008) Cramér asymptotics for finite time first passage probabilities for general Lévy processes. W przygotowaniu.

Adam Paszkiewicz
Uniwersytet Łódzki, Wydział Matematyki i Informatyki
Jakub Olejnik
Uniwersytet Łódzki, Wydział Matematyki i Informatyki

Ciągłość procesów o ograniczonych przyrostach, istnienie miar majoryzujących oraz skończoność wyceny pewnego ryzyka.

Rozważmy skończony podzbiór A odcinka $[0,1]$ z odległością $d(s,t) := (|s - t|)^{\frac{1}{p}}$ oraz wszystkie procesy $X(t)$, $t \in A$, o ograniczonych przyrostach w sensie $\|X(s) - X(t)\|_p = d(s,t)$. Okazuje się, że wielkości

$$\begin{aligned} M(A) &:= E\left(\sup_X \left|\max_{t\in A} X(t)\right|\right), \\ \mathbf{M}(A) &:= \sup\{m(A); m - \text{miara majoryzująca dla } (A,d)\} \end{aligned}$$

oraz wartość ubezpieczenia pewnego typu ryzyka (którą oznaczymy przez $\|V_1 ... V_k 0\|_p$) są tego samego rzędu. Szereg pojęć i lematów kombinatorycznych okazuje się niezbędny w dowodzie.

Bibliografia

[1] A.Paszkiewicz 'On complete characterization of coefficients of a.e. convergent orthogonal series' preprint Wydziału Matematyki i Informatyki UŁ 2008.
[2] A.Paszkiewicz 'On complete characterization of coefficients of a.e. convergent orthogonal series and on majorizing measures' preprint Wydziału Matematyki i Informatyki UŁ 2008.

Katarzyna Pietruska-Pałuba
Instytut Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego

Przestrzenie funkcyjne na fraktalach – podejście probabilistyczne

Rozważmy formę Dirichleta związaną z procesem Markowa na (X,ρ,μ), o gęstości przejścia $p(t,x,y)$. Jej dziedzina składa się z tych funkcji $f \in L^2(X,\mu)$, dla których

$$\sup_{t>0} \frac{1}{t} \int_X \int_X (f(x) - f(y))^2 p(t,x,y)\mu(dx)\mu(dy) < \infty. \tag{4}$$

Wiadomo ([1,2]), że gdy mamy na czynienia z ruchem Browna na fraktalach z klasy 'simple nested', to warunek (4) jest równoważny następującemu:

$$\sup_{n>0} 2^{n(d_f+d_w)} \int\int_{\rho(x,y)\le\frac{1}{2^n}} (f(x) - f(y))^2 \mu(dx)\mu(dy) < \infty, \tag{5}$$

i że to samo zachodzi dla przestrzeni metrycznych, o ile tylko istnieje na nich markowski proces dyfuzji o wykładniczo zanikającej funkcji przejścia (zob. niżej).

Warunek (5) jest przypadkiem szczególnym definicji przestrzeni *typu Lipschitza*, pochodzących od Jonssona: $f \in Lip(\beta, p, q)(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f \in L^p(X, \mu)$ oraz $\|(a_n^{(p)}(f))\|_{\ell_q} < \infty$, gdzie

$$a_n^{(p)}(f) = \left(2^{n(d_f + p\beta)} \int \int_{\rho(x,y) \le \frac{1}{2^n}} |f(x) - f(y)|^p \mu(dx)\mu(dy) \right)^{1/p}$$

(d_f i d_w są pewnymi stałymi charakterystycznymi dla przestrzeni (X, ρ, μ)), a więc dziedziną formy Dirichleta dla wspominanej wyżej dyfuzji jest $Lip(\frac{d_w}{2}, 2, \infty)$.

W komunikacie przedstawimy charakteryzację przestrzeni $Lip(\beta, p, \infty)(X)$ dla $p \ge 1$, używającą markowskiej funkcji przejścia $p(t, x, y)$. Wynik ten będzie prawdziwy, o ile na przestrzeni (X, ρ, μ) istnieje proces dyfuzji o funkcji przejścia, która zachowuje się jak

$$c_1 t^{-\frac{d_f}{d_w}} \exp\left\{ -c_2 \left(\frac{\rho(x,y)}{t^{1/d_w}} \right)^{\frac{d_w}{d_w - 1}} \right\}.$$

Bibliografia

[1] Jonsson, A. (1996) *Brownian motion on fractals and function spaces*, Math. Z., **222** , 495–504.

[2] Pietruska-Pałuba, K. (1999) *Some function spaces related to the Brownian motion on simple nested fractals*, Stoch. Stoch. Rep. **67**, 267–285.

[3] Pietruska-Pałuba, K. (2000) *On function spaces related to fractional diffusions on $d-$sets*, Stoch. Stoch. Rep., **70**, 153–164.

Teresa Rajba
Katedra Matematyki i Informatyki
Akademia Techniczno–Humanistyczna
Bielsko-Biała

O ułamkowych półgrupach rozkładalności

Niech ID będzie zbiorem miar nieskończenie podzielnych na prostej. Miarę probabilistyczną $\mu \in \mathrm{ID}$ nazywamy α-krotnie c-rozkładalną jeśli istnieje miara $V \in \mathrm{ID}$, taka że

$$\mu = *_{k=0}^{\infty} T_{c^k} V^{r(k,\alpha)},$$

gdzie $r(k, \alpha) = \Gamma(k+\alpha)/\Gamma(\alpha)\Gamma(k+1)$, $\alpha > 0$ (α niekoniecznie liczba naturalna), $0 < c < 1$ ([2]).

W referacie przedstawimy własności miar α-krotnie c-rozkładalnych. Zdefiniujemy i podamy pewne własności półgrup rozkładalności $D^\alpha(\mu)$ rzędu $\alpha > 0$, związanych z miarą nieskończenie podzielną μ. Półgrupy te są uogólnieniem półgrup rozkładalności Urbanika $D(\mu)$ ([3]) oraz półgrup rozkładalności rzędu $n \in \mathbb{N}$ rozważanych w [1].

Bibliografia

[1] Rajba, T. (2001) *On multiple decomposability of probability measures on* $\mathbb{R}$, Demonstratio Math 2, 275–294.

[2] Thu, N. V. (1980) *A characterization of some probability distributions*, Lecture Notes in Math 828, 302–308.

[3] Urbanik, K. (1972) *Lévy's probability measures on Euclidean spaces*, Studia Math. 44, 119–148.

Tomasz Rolski
Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski
Zbigniew Puchała
Instytut Teoretycznej i Stosowanej Informatyki, PAN

Dokładna asymptotyka ogona rozkładu czasu kolizji dla niezależnych cząstek Brownowskich z różnymi dryfami.

Niech $W = \{x \in R^n : \ x_1 < \ldots < x_n\}$ i $X_t^1, \ldots, X_t^n$ będą niezależnymi procesami Browna z dryfami $a_1, \ldots, a_n$, każdy startujący z $\mathbf{x} = (X_0^1, \ldots, X_0^n) \in W$. Rozważa się czas kolizji $\tau = \inf\{t > 0 : \ \mathbf{X}_t \notin W\}$. Ponieważ cząstki mają różne dryfy nie można bezpośrednio użyć wzoru Karlina-McGregora z [1]. Dowodzi się dokładnej asymptotyki dla

$$\mathrm{P}_{\mathbf{x}}(\tau > t) = Ch(\mathbf{x})t^{-\alpha}e^{-\gamma t}(1 + o(1))$$

gdy $t \to \infty$, gdzie $C, h(\mathbf{x}), \alpha, \gamma$ są podane w terminach współczynników dryfu. Różne scenariusze są rozpatrywane przy użyciu pojęcia stabilnej partycji wektora $(a_1, \ldots, a_n)$.

Przedstawione wyniki są z pracy [3]. Asymptotyki ogonów rozkładów czasu kolizji dla innych procesów niż Brownowskie były rozważane w pracy [2].

Bibliografia

[1] Karlin, S. & McGregor, J. (1959) Coincidence probabilities. *Pacific J. Math.* 1141–1164.

[2] Z. Puchała, Z. i Rolski, T. (2005) The exact asymptotics of the time to collision. *Electronic Journal of Probability* **10**, 1359–1380.

[3] Puchała, Z. i Rolski, T. (2008) The exact asymptotic of the collision time tail distribution for independent Brownian particles with different drifts. *Probability Theory and Related Fields*

Andrzej Rozkosz
Wydział Matematyki i Informatyki UMK, Toruń

O pewnych uogólnieniach wzoru Kaca-Feynmana

W 1990 r. É. Pardoux i S. Peng wprowadzili pojęcie ogólnego, nieliniowego stochastycznego równania różniczkowego wstecz. Od tego czasu teoria takich równań rozwija się intensywnie ze względu na ich szerokie zastosowania m.in. w matematyce finansowej, teorii sterowania i równaniach różniczkowych cząstkowych.

Pierwsze prace poświęcone związkom między stochastycznymi równaniami wstecz i równaniami cząstkowymi dotyczyły interpretacji probabilistycznej rozwiązań różnych problemów brzegowo-początkowych dla równania półliniowego

$$(\frac{\partial}{\partial t} + L)u(t,x) = f(t,x,u,\nabla u),$$

w którym $f(t,x,\cdot,\cdot)$ spełnia klasyczny warunek liniowego wzrostu i warunek Lipschitza oraz L jest operatorem liniowym drugiego rzędu postaci

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{d} a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b^i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

(dobrym wprowadzeniem w tematykę zawierająca omówienie wyników osiągniętych do roku 1998 jest przeglądowa praca [1]). Dalsze pracy przyniosły między innymi wyniki dotyczące interpretacji probabilistycznej rozwiązań równań, w których L jest operatorem w formie dywergencyjnej, równań „bardziej nieliniowych" i równań w przestrzeniach nieskończeniewymiarowych.

W referacie podam krótkie wprowadzenie w tematykę stochastycznych równań różniczkowych wstecz i ich związków z równaniami cząstkowymi drugiego rzędu, a następnie omówię pewne własne wyniki dotyczące interpretacji stochastycznej równań w formie dywergencyjnej i równań opisujących prawa zachowania.

Bibliografia

[1] É. Pardoux, É. (1998) Backward Stochastic Differential Equations and Viscosity Solutions of Systems of Semilinear Parabolic and Elliptic PDEs of Second Order. W: *Stochastic Analysis and Related Topics VI, The Geilo Workshop 1996*, pp. 79–127, L. Decreusefond, J. Gjerde, B. Øksendal, A.S. Üstünel (Eds.), Birkhüser, Boston.

Michał Ryznar
Instytut Matematyki i Informatyki Politechniki Wrocławskiej

Teoria potencjału procesów relatywistycznych stabilnych

W referacie omówimy teorię potencjału α-stabilnego procesu relatywistycznego. Jest to symetryczny proces Lévy'ego $\{X_t\}_{t\geq 0}$ o wartościach w $\mathbb{R}^d$ i funkcji charakterystycznej zadanej wzorem

$$E^0 e^{i(\xi,X_t)} = e^{-t((|\xi|^2+m^{2/\alpha})^{\alpha/2}-m)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \tag{6}$$

gdzie indeks stabilności $\alpha \in (0,2)$ oraz masa $m \geq 0$.

Proces stabilny a relatywistyczny stabilny
Potencjały Riesza (proces stabilny) i Bessla (proces relatywistyczny stabilny). Relatywistyczny hamiltonian ($\alpha = 1$).

Funkcje Greena i jądra Poissona
Potencjały wolne i ich oszacowania. Optymalne oszacowania dla zbiorów ograniczonych. Wzory na potencjały i jądra Poissona dla jądra Bessla dla półprzestrzni. Oszacowania dla pólprzestrzeni.

Brzegowe własności funkcji harmonicznych
Brzegowa zasada Harnacka, reprezentacja Martina, relatywne twierdzenie Fatou.

Bibliografia

[1] T. Byczkowski, J. Małecki and M. Ryznar, Bessel Potentials, Hitting Distributions and Green Functions, (2007) (to appear in TAMS)
[2] Byczkowski, T., Ryznar, M., Byczkowska, H.: Bessel potentials, Green functions and exponential functionals on half-spaces, Probab. Math. Statist. 26 (2006), 155–173
[3] T. Grzywny and M. Ryznar, Estimates of Green function for some perturbations of fractional Laplacian, (2007) (to appear Illinois J. Math.).
[4] T. Grzywny and M. Ryznar, Optimal estimates of Green function of half-spaces for relativistic process, Potential Anal. 28 (2008), 201-239.
[5] M. Ryznar, Estimates of Green function for relativistic α-stable processes, Potential Anal. 17 (2002), 1-23.

Tomasz Schreiber
Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Konstrukcje graficzne dla wielokątnych pól Markowa na płaszczyźnie

Wielokątne pola Markowa, wprowadzone w latach 80-tych przez Araka i Surgailisa, są losowymi zespołami zamkniętych i nieprzecinających się konturów wielokątnych na płaszczyźnie. Kontury te oddzielają obszary o różnych *kolorach*, a tak uzyskane pole losowe posiada dwuwymiarową własność Markowa. W pewnym stopniu pola takie mogą być interpretowane jako ciągła wersja modeli Isinga i Pottsa, z którymi dzielą wiele kluczowych własności. Dla pól wielkoątnych w tak zwanym *reżimie zgodnym* Arak i Surgailis opracowali bezpośrednią konstrukcję, zwaną zwykle *reprezentacją dynamiczną*. W wystąpieniu zbudujemy ogólną klasy niejednorodnych pól Markowa i przedstawimy dla nich szeroką klasę konstrukcji graficznych umożliwiających jednoprzebiegową symulację doskonałą i istotnie uogólniających podaną przez Araka i Surgailisa reprezentację dynamiczną. Konstrukcji tych użyjemy następnie by podać jawne wzory na pewne numeryczne charakterystyki pól wielokątnych, w tym na pewne szczególne funkcje korelacyjne dowolnego rzędu. Na zakończenie wspomnimy o zastosowaniach rozwijanej teorii w bayesowskiej segmentacji obrazów cyfrowych.

Alina Semrau
Uniwersytet Technologiczno–Przyrodniczy w Bydgoszczy

Aproksymacje Eulera słabych rozwiązań stochastycznych równań różniczkowych z odbiciami o nieciągłych współczynnikach

Celem prezentacji jest pokazanie zbieżności według rozkładu ciągów Eulera i Eulera-Peano aproksymujących słabe rozwiązanie stochastycznego równania różniczkowego z odbiciem w zbiorze wypukłym $D \subseteq \mathbb{R}^d$ postaci

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s)\, dW_s + \int_0^t b(X_s)\, ds + K_t, \qquad t \in \mathbb{R}^+, \tag{1}$$

gdzie $X_0 = x_0 \in \overline{D} = D \cup \partial D$, X jest procesem o wartościach w $\overline{D}$, K jest procesem o ograniczonej wariacji rosnącej tylko wtedy, gdy $X_t \in \partial D$, W jest d-wymiarowym standardowym procesem Wienera, a $\sigma : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$, $b : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ są funkcjami mierzalnymi, ciągłymi prawie wszędzie względem miary Lebesguea. Dowody oparte są na nowych nierównościach typu Krylova dla rozważanych ciągów aproksymujących. Aproksymacje Eulera i Eulera-Peano rozważane były dotychczas, gdy współczynniki σ, b były ciągłe, a równanie (1) miało własność jednoznaczności w sensie trajektorii ([2], [3]).

Bibliografia

[1] A.V. Melnikov, Stochastc equations and Krylov's estimates for semimartingales, Stochastics, Vol. 10, (1983), 81–102.
[2] L. Słomiński, On approximation of solutions of multidimensional SDEs with reflecting boundary conditions, Stochastic Process. Appl. 50 (1994), 197–219.
[3] L. Słomiński, Euler's approximations of solutions of SDEs with reflecting boundary, Stochastic Process. Appl. 94 (2001), 317–337.

Michał Seweryn
Uniwersytet Łódzki, Wydział Matematyki i Informatyki

O twierdzeniach granicznych dla średnich ważonych zależnych zmiennyh losowych.

W referacie zaprezentujemy twierdzenia podające ogólne warunki wystarczające dla zachodzenia Ważonego Mocnego Prawa Wielkch Liczb przy pewnych klasycznych założeniach dotyczących zależności badanych zmiennych losowych.

Rozważać będziemy ciąg zmiennych losowych $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz nieujemne funkcje rzeczywiste g i h. Mówić będziemy, że ciąg $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest (g,h)-sumowalny jeżeli istnieje ciąg liczb rzeczywistych $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{g(n)}\sum_{k=1}^{n}\frac{(X_k-m_k)}{h(k)}=0 \quad a.s.$$

Najszerszą klasę par (g,h), dla których można w pełni scharakteryzować ciągi $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zmennych iid, które są (g,h)-sumowalne, podał w 2003 roku Jajte (7), rozszerzając wcześniejszy wyniki Fellera (6) (zob. także (8)).

Prezentowane wyniki nawiązywać będą zarówno do uogólnień klasycznego Mocnego Prawa Wielkich Liczb Kołmogorowa na pryzpadek zmiennych typu PQD oraz AQSI (zob. (5),(12),(2)), jak również do wyników dotyczących zmiennych stowarzyszonych (zob. (4),(9)) oraz mixingów (zob. (3),(13)).

Postaramy się odpowiedzieć na naturalnie rodzące sie pytanie o powiązanie pewnych klas średnich ważonych z wymienionymi modelami zależności zmiennych losowych. Ponadto nawiążemy do ciekawych zastosowań uzyskanych wyników, takich jak Prawie Pewne Centralne Twierdzenie Graniczne (zob. (1),(14),(10),(11)).

Bibliografia

[1] G.A. Brosamler (1988) An almost everywhere central limit theorem, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. vol.104 , 561-574.

[2] T.K.Chandra, S.Ghosal (1996) The strong law of large numbers for weighted averages under dependence assumptions, J. Theor. Probab. vol.9 , 797-809.
[3] P.Doukhan, P.Massart, E.Rio (1994) The functional central limit theorem for strongly mixing processes, Ann. Inst. H.Poincare Probab. Stat. vol.30, 63-82.
[4] F.Esary, F.Proschan, D.W. Walkup (1967) Association of random variables with applications, Ann. Math. Stat. vol.38 no.5, 1466-1474.
[5] N.Etemadi (1981) An elementary proof of the strong law of large numbers, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete vol.55, 119-122.
[6] W.Feller (1946) A limit theorem for random variables with infinite moments, Amer. J. Math. vol.68 no.2, 257-262.
[7] R.Jajte (2003) On the strong law of large numbers, Ann. Probab. vol.31 no.1, 409-412.
[8] A.I.Martikainen, V.V.Petrov (1980) On a theorem of Feller, Theor. Probab. Appl. vol.25 no.1, 191-193.
[9] P.Matuła (1996) Convergence of weighted averages of associated random variables, Probab. Math. Stat. vol.16, 337-343.
[10] P.Matuła (1998) On the almost sure central limit theorem for associated random variables, Probab. Math. Stat. vol.18, 411-416.
[11] P.Matuła (2005) On almost sure limit theorems for positively dependent random variables, Stat. Probab. Letters vol.74, Issue 1, 59-66.
[12] P.Matuła (2005) On some families of AQSI random variables and related strong law of large numbers, Appl. Math. E-Notes vol.5, 31-35.
[13] E.Rio (1995) A maximal inequality and dependent Marcinkiewicz-Zygmund strong laws, Ann. Probab. vol.23 no.2, 918-937.
[14] P.Schatte (1988) On strong version of the central limit theorem, Math. Nachr. vol.137, 237-246.

Wojciech Słomczyński
Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński

Całkowy wzór na entropię: od ukrytych łańcuchów Markowa do układów kwantowych

Jedną z najważniejszych wielkości badanych w teorii układów dynamicznych jest *entropia dynamiczna*. Zależy ona w ogólności zarówno od *dynamiki* układu i ustalonego *punktu równowagi*, jak i od wyboru *przyrządu pomiarowego*. Stanowi miarę tego, jak wraz ze wzrostem długości czasu prognozy wyników pomiaru pogarsza się jej jakość, lub inaczej, w jakim stopniu przyszłe wyniki pomiarów stają się nieprzewidywalne, a obserwator traci posiadaną informację o układzie. Sformułowanie matematycznej teorii entropii, począwszy od pionierskich prac Shannona (1948) z teorii informacji i Kołmogorowa (1958) z teorii układów dynamicznych uważane jest powszechnie za „jedno z najbardziej znaczących osiągnięć matematyki XX wieku” (Vershik). W szczególności wprowadzenie pojęcia entropii pozwoliło na formalne rozróżnienie układów *regularnych*, dla których entropia dynamiczna równa się zero i *chaotycznych*, dla których jest silnie dodatnia. Innymi słowy - entropia dynamiczna stanowi miarę *chaosu*.

Chociaż teoretyczne znaczenie entropii jest trudne do przecenienia, to jedynie w niewielu przypadkach da się ją w sposób jawny policzyć. Pragnę przedstawić nową metodę obliczania entropii opartą na następującym *wzorze całkowym*:

$$\text{entropia dynamiczna} = \int_B h \, d\mu \ ,$$

gdzie B stanowi *zbiór stanów* układu dynamicznego, h jest *entropią Boltzma-nna-Shannona*, zaś μ *miarą niezmienniczą* dla *iterowanego układu funkcyjnego* skojarzonego z układem dynamicznym i przyrządem pomiarowym.

Wzory tego typu były znalezione uprzednio w szczególnym przypadku (dla tak zwanych miar algebraicznych) przez Fannesa *et al.* [1], którzy uogólnili wcześniejsze rezultaty Blackwella [2] dotyczące entropii funkcji łańcucha Markowa o skończonej liczbie stanów. Uzyskane przeze mnie twierdzenia [3] zawierają ich wyniki jako przypadki szczególne. Konstrukcja prowadząca do dowodu wzoru całkowego opiera się na:

1. pokazaniu, że każdemu układowi dynamicznemu i przyrządowi pomiarowemu można przypisać iterowany układ funkcyjny;
2. zbadaniu własności iterowanego układu funkcyjnego, które gwarantują istnienie i/lub jednoznaczność miary niezmienniczej;
3. uzasadnieniu wzoru całkowego przy wykorzystaniu własności iterowanego układu funkcyjnego.

W dowodach zastosowano dwie różne, nowe w tym przypadku, techniki: pierwsza wykorzystuje zwartość przestrzeni stanów w pewnej słabej topologii, druga polega na użyciu metryk rzutowych na tej przestrzeni. Stosując te metody możemy otrzymać wyniki dotyczące entropii dynamicznej w wielu konkretnych sytuacjach, na przykład dla ewolucji opisanej przez:

- macierze stochastyczne (entropia dynamiczna ukrytych łańcuchów Markowa),
- operatory z jądrem stochastycznym,
- operatory Frobeniusa-Perrona (wzór Rokhlina dla entropii Kołmogorowa-Sinaja),
- operatory unitarne (entropia Pechukasa-Becka-Graudenza dla pomiaru Lüdersa - von Neumanna, entropia stanów koherentnych, teoria skoków kwantowych).

Bibliografia

[1] Blackwell, D., The entropy functions of finite–state Markov chains, [w:] Trans. of the First Prague Conf. Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes, Liblice, November 28-30, 1956 (Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1957), pp. 13-20.

[2] Fannes, M., Nachtergaele, B. i Slegers, L., Functions of Markov processes and algebraic measures, Rev. Math. Phys. 4 (1992), 39-64.

[3] Słomczyński, W., Dynamical entropy, Markov operators, and iterated function systems, Wydawnictwo UJ, 2003.

Leszek Słomiński
Wydział Matematyki i Informatyki UMK, Toruń

Problem Skorochoda z odbijanymi skokami

W 1961 Skorochod udowodnił, że dla dowolnej funkcji ciągłej $y : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $y_0 \geq 0$ istnieje para funkcji ciągłych $x, k : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ takich, że

$$x_t = y_t + k_t,$$

gdzie $x_t \in D = [0, +\infty)$, a k jest niemalejąca i rośnie tylko wtedy, gdy $x_t = 0$. Można zauważyć, że $k_t = \sup_{s \leq t} y_s^-$, gdzie $y_s^- = \max(0, -y_s)$. Wynik Skorochoda uogólniany był później w różnych kierunkach, w tym na przypadek funkcji ze skokami i dla bardziej ogólnych zbiorów D zawartych w $\mathbb{R}^d$. Para funkcji (x, k) nazywana jest rozwiązaniem problemu Skorochoda. Zauważmy, że jeżeli funkcja y posiada skok Δy_t, który powoduje wyjście ze zbioru D (tzn. gdy $x_{t-} + \Delta y_t \notin D$), to skok ten w rozwiązaniu problemu Skorochoda w istocie nie odbija się od brzegu D, gdyż wartość funkcji x_t pozostaje na brzegu D. W szczególności jeżeli $y_t = -\mathbf{1}_{[1,+\infty)}^{(t)}$, to rozwiązanie problemu Skorochoda dla zbioru $D = [0, +\infty)$ jest postaci $x_t = 0$, $k_t = \mathbf{1}_{[1,+\infty)}^{(t)}$.

W pracy [1] wprowadzona została definicja problemu Skorochoda z odbijanymi skokami, w której wartość k_t może przyrastać, gdy $x_t = 0$ tylko wtedy, gdy t jest punktem ciągłości funkcji y_t, a skoki x_t rzeczywiście są odbijane od brzegu. W rozważanym przykładzie rozwiązanie problemu Skorochoda z odbijanymi skokami jest postaci $x_t = \mathbf{1}_{[1,+\infty)}^{(t)}$, $k_t = 2\mathbf{1}_{[1,+\infty)}^{(t)}$. Problem Skorochoda z odbijanymi skokami badany był później także przez innych autorów w tym Prottera, Ronga i Guillemeau. Ograniczyli się oni jednak do przypadku półprostej $D = [0, +\infty)$ lub inaczej mówiąc jednej bariery umieszczonej w zerze.

W komunikacie omówiony zostanie problem Skorochoda z odbijanymi skokami w przypadku dwóch barier, którymi są zadane funkcje l, u oraz jego zastosowania dla procesów stochastycznych. Prezentowane wyniki uzyskane zostały wspólnie z T. Wojciechowskim.

Bibliografia

[1] Chaleyat-Maurel, M., El Karoui, N., Marchal, B. (1980), Réflexion discontinue et systèmes stochastiques, Ann. Probab. 8, 1049-1067.

Łukasz Stettner
Intytut Matematyczny PAN

O problemach maksymalizacji wzrostu i wrażliwego na ryzyko wzrostu portfela inwestycyjnego

Problemy związane z optymalizacją portfela inwestycyjnego na długim okresie czasu będą przedstawione. Będziemy zakładali, że cena akcji zależy od czynników ekonomicznych. Interesować nas będzie maksymalizacja średniego wzrostu portfela na jednostkę czasu i wrażliwego na ryzyko wzrostu portfela na nieskończonym horyzoncie czasowym. Pokazane będą wyniki dla rynków bez kosztów za transakcje jak również z różnymi kosztami za transakcje (stałe plus proporcjonalne, proporcjonalne, proporcjonalne stałe plus proporcjonalne do wielkości transakcji). Rozpatrywane będą modele z czasem ciągłym jak i dyskretnym. Istotna część wyników będzie opierała się na analizie ergodycznych własności procesu części kapitału zainwestowanego w poszczególne akcje. W szczególnych przypadkach będzie zakładana obowiązkowa dywersyfikacja portfela, tzn. obowiązkowa transakcja, gdy portfel osiągnie wartości bliskie brzegowym.

Krzysztof Szajowski
Instytut Matematyki i Informatyki, Politechnika Wrocławska
Wojciech Sarnowski
Instytut Matematyki i Informatyki, Politechnika Wrocławska

O optymalnym wykrywaniu segmentów jednorodnych w ciągach stochastycznych

Zagadnienie, które jest przedmiotem referatu, znane jest jako sekwencyjne wykrywnie rozregulowania w ciągu losowym. Matematyczne sformułowanie pochodzi od Kołmogorowa, a pierwszą pracą poświęconą temu problemowi jest artykuł Shiryaeva [3]. Jest to inne podejście niż analiza jednorodności danych oparta na badaniu funkcji wiarogodności dla próby losowej stosowana przez statystyków, przykładowo przez Page'a, i polega na sprowadzeniu zadania do problemu optymalnego zatrzymywania odpowieniego ciągu losowego z właściwie dobraną funkcja wypłaty. Ze względu na ważne zastosowania i ciekawe teoretyczne problemy związane z analizą tego modelu prowadzone są w dalszym ciągu badania oraz rozwijane metody dla tego zagadnienia.

W tej pracy podejmujemy próbę uwzględnienia informacji *a priori* o rozkładzie chwil rozregulowania, więcej niż jednej chwili, i poszukujemy algorytmu na wykrycie interesującego nas segmentu. Jest to kontynuacja badań zapoczątkowanych pracami Bojdeckiego [1], Yoshidy [5] i Szajowskiego [4], częściowo opublikowanymi w pracy [2].

Bibliografia

[1] T. Bojdecki and J. Hosza, On a generalized disorder problem, Stochastic Processes Appl, 18:349–359, 1984

[2] W. Sarnowski, K. Szajowski (2005) On line detection of a part of the sequence with unspecified distribution, Rap. IMiI PWr

[3] A.N. Shiryaev, The detection of spontaneous effects, Sov. Math, Dokl., 2:740–743, 1961, translation from Dokl. Akad. Nauk SSSR 138, 799-801 (1961)

[4] K. Szajowski, Optimal on-line detection of outside observation, J.Stat. Planning and Inference, 30:413–426, 1992.

[5] M. Yoshida, Probability maximizing approach for a quickest detection problem with complocated Markov chain, J. Inform. Optimization Sci., 4:127–145, 1983.

Wojciech Szatzschneider
Universidad Anáhuac México Norte

Cooperation issues in environmental topics. Modelling through Squared Bessel processes.

Preface

Under inefficient cooperation to meet Kioto protocol (particularly by East European countries) and frequent abuses using permits to pollute approach, we propose different methodology based on Principal-Agent approach being Nature the principal.
To get some specific results we use $BESQ^\delta$ processes because of so called Pythagoras theorem wich allows to compare easily three basic optimal strategies with the reduced space of actions.

Modelling

Let pollution level in one part (country, factory) be given by:

$$dX(t) = 2\sqrt{X(t)}dW(t) + \delta dt.$$

This is squared Bessel process of dimension δ, which is denoted $BESQ^{\delta}$.
For such processes apply the so called Pythagoras theorem

$$BESQ^{\delta_1} \oplus BESQ^{\delta_2} = BESQ^{\delta_1+\delta_2}$$

where $\oplus$ stands for sum of independent terms. (The factor 2 could be substituted by any other positive factor). In the case of improvements we shall consider more general processes:

$$dX(t) = 2\sqrt{X(t)}dW(t) + (\delta - \kappa X(s))ds \text{ for } \kappa \geq 0$$

In financial literature this model is called CIR (from Cox, Ingersoll and Ross) and is considered as one of the most important models for instantaneous interest rates).

An agent, owner of the certificate that pays $S - F(X(s), s \leq 1)$ can make improvements:

1. Making δ smaller
2. Adding $-\kappa X(s)$

Set $X(0) = 1$, $Y(0) = 1$, $\delta = 1$, or 2 and $\mu = 1$ in the agent's cost of improvements:

$$\mu \int_0^1 E(\kappa X(s) + \delta_1)^2 ds,$$

where without intervention

$$\begin{aligned} dX(s) &= 2\sqrt{X(s)}dW_1 + 1 \cdot ds, \\ dY(s) &= 2\sqrt{Y(s)}dW_2 + 2 \cdot ds, \end{aligned}$$

being $X(s)$ and $Y(s)$ independent.

1. **Full cooperation (fusion)**
   Set $X(s) + Y(s) = V(s)$

   After joint agent's actions:

   $$dV(s) = 2\sqrt{V(s)}dW(s) + (3 - \xi_1)ds - \kappa_3 V(s)ds \quad 0 \leq \kappa_3, \ 0 \leq \xi_1 \leq 3, \quad V(0) = 2$$

   ($BESQ^{\delta}$ or CIR with $\delta \geq 0$ is always nonnegative).

   We want to maximize with respect to κ_3, ξ_1.

   $$S - E\int_0^1 V^2(s)ds - E\int_0^1 (\kappa_3 V(s) + \xi_1)^2 ds$$

   being the first term the social cost of pollutions.

2. **Collusive Optima** Now the problem is to maximize with respect to κ_1, κ_2, $0 \le \delta_1 \le 1$, $0 \le \delta_2 \le 2$.

$$S - E\int_0^1 (X(s)+Y(s))^2 ds - E\int_0^1 (\kappa_1 X(s)+\delta_1)^2 ds - E\int_0^1 (\kappa_2 Y(s)+\delta_2)^2 ds$$

$$\begin{aligned} dX(s) &= 2\sqrt{X(s)}dW_1 + (1-\delta_1)ds - \kappa_1 X(s)ds \\ dY(s) &= 2\sqrt{X(s)}dW_2 + (2-\delta_2)ds - \kappa_2 Y(s)ds \end{aligned}$$

3. **Nash Optima** In the case of Nash we have to issue 2 certificates separately for each agent. We present some numerical results for our choice of parameter

	Fusion	Collusive	Nash
Total pollution	1.73	1.53	3.48
Effort	1.83	2.54	3.29

We also consider certificates of the form $Ce^{-\int_0^1 r(s)ds}$ and $Ce^{\epsilon\int_0^1 r(s)ds}$ for small enough ϵ. We belive that the calculations of the expectation of the last term are new.

Zbigniew S. Szewczak
Wydział Matematyki i Informatyki, UMK, Toruń

Nierówność Berry-Esséena dla nieograniczonych funkcjonałów od nieodwracalnych łańcuchów Markowa

Niech $\{\xi_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ będzie ściśle stacjonarnym łańcuchem Markowa. Oznaczmy przez $\mathbb{S}$ i $\mathcal{S}$ jego przestrzeń fazową oraz $\sigma-$algebrę zbiorów mierzalnych, zaś przez $\mathbf{P}$ i π, operator przejścia oraz stacjonarny rozkład prawdopodobieństwa. Niech $f : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ będzie taka, że $\mathrm{E}[f(\xi_0)] = 0$ oraz $\mathrm{E}[S_n^2] \to_n \infty$, gdzie $S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)$. Załóżmy, że łańcuch jest jednostajnie ergodyczny, tzn. że

$$\Big\| \mathbf{P}^n(h) - \mathbf{\Pi}(h) \Big\| \le C|\gamma|^n \Big\| h \Big\|, \quad n \ge 1, \quad h \in L^\infty(\pi),$$

gdzie $\gamma \in \mathbb{C}$, $|\gamma| < 1$, $C > 0$, $\Big\| \cdot \Big\|$ norma w $L^\infty(\pi)$ oraz $\mathbf{\Pi}$ operator wartości średniej względem rozkładu π. S. V. Nagaev (cf. [1]) udowodnił nierówność

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\mathrm{P}[S_{n+1} < x\sigma\sqrt{n}] - \mathfrak{N}(x)| \le c_1 \frac{m_3 c(\gamma, C)}{\sigma^3\sqrt{n}} + c_2 \frac{\mathrm{E}|f(\xi_0)|}{\sigma\sqrt{n}} + c_3(1 + \frac{\mathrm{E}|f(\xi_0)|}{\sigma})\kappa^n,$$

gdzie $\kappa = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}|\gamma|$, $c(\gamma, C)$ zależy jedynie od γ, C, $\mathfrak{N}$ oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego, $m_3 = \Big\| \mathrm{E}[|f(\xi_1)|^3 \,|\, \xi_0 = \cdot\,] \Big\|$, $\sigma^2 = \mathrm{E}[f(\xi_0^2)] + 2\sum_{n=1}^\infty \mathrm{E}[f(\xi_0)f(\xi_n)]$,

zaś c_1, c_2, c_3 są *nieznanymi* stałymi niezależnymi od π oraz $\mathbf{P}$. W pracy [2] podano górne oszacowanie na stałe dla ograniczonych funkcjonałów od odwracalnych łańcuchów Markowa. W komunikacie przedstawię górne oszacowanie w operatorowym wariancie (cf. [3],[4]) dla nieograniczonych funkcjonałów od nieodwracalnych łańcuchów Markowa.
Twierdzenie. *Dla dowolnej funkcji* $0 \le h \in L^\infty(\pi)$ *oraz dowolnego* $n \ge 1$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \Big\| \mathrm{E}[I_{[S_n < x\sigma\sqrt{n}]} h(\xi_n) \,|\, \xi_0 = \ \cdot\,] - \mathfrak{N}(x)\mathbf{\Pi}(h) \Big\|$$
$$< (10^6 \frac{(1+C)^4}{(1-|\gamma|)^4} \frac{m_3}{\sigma^3\sqrt{n}} + (1+24C)\kappa^n) \Big\| h \Big\| .$$

Bibliografia

[1] Nagaev, S. V. (1961) More exact statements of limit theorems for homogeneous Markov chains, *Theory Probab. Appl.*, 6, 1, 62–81.
[2] Lezaud, P. (2001) Chernoff and Berry-Esséen inequalities for Markov processes, *ESAIM: Probability and Statistics*, 5, 183–201.
[3] Szewczak, Z. S. (2008) Edgeworth expansions in operator form, *Statist. Probab. Lett.*, doi: 10.1016//j.spl.2008.01.004.
[4] Szewczak, Z. S. (2008) Large Deviations in Operator Form, *Positivity*, doi: 10.1007//s11117-008-2180-4.

Dominik Szynal
UMCS Lublin
Iwona Malinowska
Politechnika Lubelska

Rozkład Pascala w rozkładzie złożonym

Powszechnie znane są zastosowania teoretyczne i praktyczne rozkładu geometrycznego w rozkładzie złożonym, tj. rozkładzie sumy $\sum_{n=1}^{N} X_n$, gdzie (X_n) jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, a N zmienną losową o rozkładzie geometrycznym. W referacie podamy zastosowania rozkładu złożonego, w którym N ma rozkład Pascala.

Piotr Śniady
Uniwersytet Wrocławski

Probabilistyczne spojrzenie na asymptotyczną teorię reprezentacji

Niech będzie dany ciąg grup G_n (np. ciąg grup permutacji S_n lub ciąg grup unitarnych $U(n)$) wraz z ciągiem ich reprezentacji ρ_n, gdzie ρ_n jest reprezentacją grupy G_n. Przedmiotem asymptotycznej teorii reprezentacji jest badanie reprezentacji ρ_n w granicy, gdy $n \to \infty$. Ponieważ każda taka reprezentacja zadaje w kanoniczny sposób miarę probabilistyczną na zbiorze nieredukowalnych reprezentacji, wiele pytań asymptotycznej teorii reprezentacji daje się sformułować w języku probabilistyki, w szczególności można pytać o prawa wielkich liczb lub centralne twierdzenie graniczne. Podczas odczytu przedstawię w sposób możliwie mało techniczny podstawowe idee probabilistycznego podejścia do teorii reprezentacji oraz, jeśli czas pozwoli, jego związki z teorią macierzy losowych.

Anna Talarczyk
Uniwersytet Warszawski

Fluktuacje czasu przebywania układów cząstek z rozgałęzianiem

W referacie zostaną omówione wyniki uzyskane wspólnie z T. Bojdeckim i L. Gorostizą.

Zajmujemy się badaniem następującego układu cząstek w $\mathbb{R}^d$: W chwili początkowej konfiguracja cząstek zadana jest przez punktową miarę Poissona z miarą intensywności μ (w najprostszym przypadku jest to miara Lebesgue'a, ale można rozważać też ogólniejsze miary intensywności, np. postaci $\mu(dx) = \frac{dx}{1+|x|^\gamma}$). Następnie każda cząstka porusza się, niezależnie jedna od drugiej, zgodnie ze standardowym ruchem α-stabilnym. Po czasie losowym (wykładniczym) cząstka ginie albo rozpada się na losową liczbę identycznych cząstek, które dalej poruszają się i gałązkują niezależnie, zgodnie z tym samym mechanizmem. Rozważamy gałązkowanie krytyczne (o średniej 1) typu $1+\beta$, tzn. którego rozkład ma funkcję tworzącą

$$G(s) = s + \frac{(1-s)^{1+\beta}}{1+\beta}$$

dla ustalonego $\beta \in (0,1]$. Gdy $\beta = 1$ jest to gałązkowanie binarne: z równymi prawdopodobieństwami cząstka albo ginie, albo dzieli się na dwie. Stan układu opisany jest przy pomocy procesu empirycznego N, gdzie $N_t(A)$ jest liczbą cząstek w zbiorze A w chwili t.

Badamy zachowanie procesu przebywania z przeskalowanym czasem

$$Y_T(t) = \int_0^{Tt} N_s ds.$$

Interesują nas fluktuacje tego procesu, tj. proces

$$X_T(t) = \frac{1}{F_T}\left(Y_T(t) - EY_T(t)\right).$$

Szukamy takiej normalizacji F_T, aby proces X_T był zbieżny w sensie rozkładów do nietrywialnej granicy, gdy $T \to \infty$. W zależności od parametrów d, α, β oraz miary intensywności początkowej μ otrzymujemy różne rodzaje procesów granicznych.

Bibliografia

[1] Bojdecki, T., Gorostiza, L.G. and Talarczyk, A.: Limit theorems for occupation time fluctuations of branching systems I: Long-range dependence. Stoch. Proc. Appl. 116 (2006), 1-18.

[2] Bojdecki, T., Gorostiza, L.G. and Talarczyk, A.: Limit theorems for occupation time fluctuations of branching systems II: Critical and large dimensions. Stoch. Proc. Appl. 116 (2006), 19-35.

[3] Bojdecki, T., Gorostiza, L.G. and Talarczyk, A.: A long-range dependence stable process and an infinite-variance branching system. Ann. Probab. 35 (2) (2007), 500-527.

[4] Bojdecki, T., Gorostiza, L.G. and Talarczyk, A.: Occupation time fluctuations of an infinite-variance branching system in large dimensions, Bernoulli 13 (1), (2007), 20-39.

[5] Bojdecki, T., Gorostiza, L.G. Talarczyk, A., Self-similar stable processes arising from high density limits of occupation times of particle systems. Potential Analysis, 28(1) (2008), 71-103.

Tomasz Tkaliński
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Aproksymacja wycen rynkowych na zbiorze miar ryzyka

Niech $\mathcal{L} = \{X_k \ : \ k = 1, \ldots, M\} \subseteq L_\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, będzie zbiorem ryzykownych wypłat. Niech ponadto dany będzie wektor $v \in \mathbb{R}^M$ taki, że v_k interpretowane jest jako obserwowana rynkowa wycena wypłaty $X_k \in \mathcal{L}$. Ustalmy $\bar{\alpha} \in (0,1)$ i rozważmy zbiór

$$\mathcal{A}_{\bar{\alpha}} = \{VaR_\alpha,\ TCE_\alpha,\ WCE_\alpha,\ ES_\alpha,\ \mathcal{M}_{\phi,c},\ c \in [0,1],\ \phi \in \mathbb{H}\},$$

gdzie dla $X \in \mathcal{L}$

$$\mathcal{M}_{\phi,c}(X) = cES_0(X) - (1-c)\int_0^1 \phi(p) F_X^{\leftarrow}(p)dp,$$

a $\mathbb{H}$ oznacza zbiór funkcji $\phi \in L_1([0,1])$ takich, że ϕ ma reprezentanta nieujemnego, nierosnącego oraz $\int_0^1 (\phi(p)dp = 1$. Funkcje tej postaci to tzw. spektralne miary ryzyka. Ponadto *ES - Expected Shortfall*, *WCE - Worst Conditinal Expectation*, *TCE - Tail Conditional*

Expectation, *VaR - Value at Risk*.
Rozważamy zagadnienie
$$min_{\rho \in \mathcal{A}_{\bar{\alpha}}} E_{\mu}(f(v_U - \rho(X_U))), \tag{1}$$
gdzie U jest pewną zmienną losową na przestrzeni $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \mu)$ o wartościach w zbiorze $\{1, \ldots, M\}$, a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest pewną funkcją ciągłą.
Zastosowanie twierdzenia Prochorowa pozwala udowodnić istnienie $\bar{\rho}$ stanowiącego rozwiązanie problemu (1), który można zinterpretować w sposób następujący: mamy zadane rynkowe wyceny wypłat $v_1, \ldots, v_M$ i poszukujemy metodologii pomiaru ryzyka $\rho \in \mathcal{A}_{\bar{\alpha}}$, która na rozpatrywanych wypłatach $X \in \mathcal{L}$ daje oszacowania ryzyka najbardziej zbliżone do wycen obserwowanych. Biorąc np. $f(x) = x^2$ mamy pewien rodzaj minimalizacji błędu średniokwadratowego.
W dalszej części dobieramy silniejsze założenia o rozkładach wypłat $X \in \mathcal{L}$ oraz biorąc $v = 0$, $f(x) = x$ pokazujemy, że zagadnienie (1) zwane wtedy problemem wyboru miary ryzyka optymalnej ze względu na wymogi kapitałowe ma rozwiązanie, które jest pewną spektralną miarą ryzyka.
Teoretyczne wyniki ilustrujemy przekładem obliczeniowym w modelu CIR, w którym wypłaty są spekulacyjnymi pozycjami związanymi z obligacjami.

Bibliografia

[1] Acerbi, C. Tasche, D. (2002) On the coherence of the Expected Shortfall
[2] Acerbi, C. (2002) Spectral measures of risk: a coherent representation of subective risk aversion
[3] Cox, J. Ingersoll, E. Ross, S. (1985) A theory of the term structure of interest rates
[4] Jakubowski, J. (2006) Modelowanie rynków finansowych
[5] Jakubowski, J. (2006) Wstęp do Teorii Prawdopodobieństwa
[6] Karatzas, I. Shreve, S. (2005) Brownian Motion and Stochastic Calculus
[7] Musiela, M. Rutkowski, M. (1997) Martingale Methods in Financial Modelling
[8] Rogers, L.C.G. (1995) Which model for term-structure of interest rates should one use?
[9] Szego, G. (2004) Risk Measures for the 21 century

Krystyna Twardowska
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego, Wydział Zastosowań Informatyki i Matematyki, Warszawa
Łukasz D. Nowak
Politechnika Warszawska, Wydział Matematyki i Technik Informacyjnych, Warszawa

Teoria falek w rozwiązywaniu stochastycznych równań różniczkowych cząstkowych

Falki znajdują szerokie zastosowanie w najróżniejszych problemach matematycznych i numerycznych. W referacie zaprezentowane zostanie wykorzystanie bazy falkowej w rozwiązywaniu stochastycznych równań różniczkowych cząstkowych na przykładzie stochastycznego liniowego parabolicznego równania różniczkowego cząstkowego Zakai.

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną z filtracją $\mathcal{F}_t$ oraz

$$b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d,\ g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d},\ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$$

będą funkcjami ograniczonymi, $\sigma = (\sigma_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta=1,\dots,p}$ będzie macierzą nieosobliwą.
Mamy następujący układ równań filtracji:

$$dX(t) = b(X(t))dt + g(X(t))dW(t),\ X(0) = X_0,\ t \geq 0,$$

$$d\overline{Y}(t) = f(X(t))dt + \sigma dV(t),\ Y(0) = 0,\ t \geq 0.$$

gdzie proces $X(t) \in \mathbb{R}^d$ jest procesem nieobserwowalnym a $Y(t) \in \mathbb{R}^p$ procesem obserwowalnym, (W, V) są $\mathcal{F}_t-$ adaptowalnymi, niezależnymi procesami Wienera o wartościach w $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p$ i macierzy kowariancji I, a X_0 jest $\mathcal{F}_0$ - mierzalnym wektorem, niezależnym od procesów W i V.

Wówczas równanie Zakai ma postać:

$$du(t) + \widetilde{L}(Y(t))u(t)dt = \widetilde{B}(Y(t))u(t)dY(t),\ u(0) = u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

gdzie

$$\widetilde{L}\phi(x) = -\sum_{i,l=1}^{d} a_{il}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_l}\phi(x) - \sum_{i=1}^{d} b_i \frac{\partial}{\partial x_i}\phi(x), \tag{7}$$

$$\widetilde{B}\phi(x) = \sigma^{-1} f\phi(x). \tag{8}$$

Do rozwiązania równania Zakai zastosujemy tradycyjną metodę Galerkina z użyciem biortogonalnej bazy falkowej. Do dyskretyzacji po czasie zastosujemy schemat Eulera i schemat Milshteina.

Bibliografia

[1] J. H. Bramble, A. Cohen and W. Dahmen, *Multiscale Problems and Methods in Numerical Simulations*, Lectures given at the C.I.M.E. Summer School, held in Martina Franca, Italy, September 9-15, 2001, Lecture Notes Math. 1825, C. Canuto, ed., Springer, Berlin, 2003.
[2] K. Itô, *Approximation of the Zakai equation for nonlinear filtering*, SIAM J. Control Optim., 34 (1996), pp. 620–634.
[3] Ł. Nowak and K. Twardowska, *On the wavelet-Galerkin method with Milshtein discretization*, to appear.
[4] T. von Petersdorff and C. Schwab, *Wavelet discretizations of parabolic integrodifferential equations*, SIAM J. Numer. Anal., 41, No.7 (1996), 159-180.

Jacek Wesołowski
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska

Miary probabilistyczne o kwadratowej transformacie kumulantowej

W klasycznej pracy [6] Lukacs udowodnił, że niezależność $X+Y$ i $\frac{X}{X+Y}$ dla niezależnych zmiennych losowych X i Y charakteryzuje rozkład gamma. W zasadzie Lukacs wykorzystał słabsze warunki regresyjne:

$$E(X|X+Y) = a(X+Y) \quad \text{oraz} \quad E(X^2|X+Y) = b(X+Y)^2 ,$$

gdzie a i b są stałymi.

W wielowymiarowej wersji regresyjnej twierdzenia Lukacsa chodzi o znalezienie rozkładów niezależnych wektorów losowych X i Y o wartościach w $\mathbb{R}^n$ takich, że

$$\mathbb{E}(X|X+Y) = a(X+Y)$$

oraz

$$\mathbb{E}(q(X)|X+Y) = b\, q(X+Y)$$

dla wszystkich form kwadratowych q na $\mathbb{R}^n$ ortogonalnych do zadanej formy kwadratowej v. Dla $n=2$ i $v(x_1,x_2) = x_1x_2$ zadanie to rozwiązane zostało w pracy [8], a dla $n=2$ i $v(x_1,x_2) = x_2^2$ w pracy [1].

W przypadku ogólnym odpowiednia rodzina rozkładów ma transformatę Laplace'a postaci

$$(1 - 2\langle c, x\rangle + v(x))^{-p} .$$

Podano kompletny opis miar probabilistycznych o takich transformatach (uogólniając twierdzenia Gindikina [3] na stożku Lorentza).

W konsekwencji sklasyfikowano naturalnych rodzin wykładniczych o funkcji wariancji postaci

$$V(m) = \frac{1}{p} m \otimes m - \varphi(m) M_v \ ,$$

gdzie M_v jest macierzą symetryczną formy v, a φ jest funkcją rzeczywistą. Te naturalne rodziny wykładnicze są uogólnieniem klasycznego rozkładu Wisharta na stożku Lorentza ($\varphi \equiv 0$) rozważanego np. w [2], [4] i [7].

Przedstawione wyniki ukażą się w pracy [5]: Letac, Wesołowski (2008).

Bibliografia

[1] Bobecka, K., Wesołowski, J. (2004) Bivariate Lukacs type regression characterizations. *J. Appl. Statist. Sci.* **13**, 49–57.

[2] Faraut, J. and Korányi, A. (1994) *Analysis on Symmetric Cones*, Oxford University Press, New York.

[3] Gindikin, S. (1975) Invariant generalized functions in homogeneous domains. *Functional Anal. Appl.* **9**, 50–52.

[4] Jensen, S.T. (1988) Covariance hypotheses which are linear in both the covariance and the inverse covariance. *Ann. Statist.* **16**, 302–322.

[5] Letac, G., Wesołowski, J. (2008) Laplace transforms which are negative powers of quadratic polynomials. *Trans. AMS* - w druku.

[6] Lukacs, E. (1955) A characterization of the gamma distribution. *Ann. Math. Statist.* **26**, 319–324.

[7] Massam, H., Neher, E. (1997) On transformations and determina nts of Wishart variables on symmetric cones. *J. Theor. Probab.* **10**, 867–902.

[8] Wang, Y. (1981) Extensions of Lukacs' characterization of the gamma distribution. In: *Analytic Methods in Probability Theory*, Lect. Notes in Math. **861**, Springer, New York, 166–177.

Piotr Witkowski
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych,
Politechnika Warszawska, Warszawa

Czasy dojścia ruchu Browna do bariery a wielowymiarowa własność Matsumoto-Yora na drzewach

Matsumoto i Yor (2001), badając funkcjonały geometrycznego ruchu Browna, odkryli, że przekształcenie

$$f(x,y) = \left(\frac{1}{x+y}, \frac{1}{x} - \frac{1}{x+y} \right)$$

zachowuje produktowość rozkładów GIG (uogólniony odwrotny gaussowski) i gamma - klasyczna, dwuwymiarowa własność Matsumoto-Yora (MY). Letac i Wesołowski (2000) podali uogólnienie tego faktu dla macierzy losowych, natomiast w pracy Massam i Wesołowskiego (2004) przedstawiono jego n-wymiarową ($n \geq 2$) wersję opartą na strukturze dowolnego, skierowanego drzewa o n-wierzchołkach, ale bez odniesienia do teorii procesów stochastycznych. Matsumoto i Yor (2003) podali związek dwuwymiarowej własności MY z funkcjonałami geometrycznego ruchu Browna, a w szczególnym przypadku $q = \frac{1}{2}$ z czasami dojścia ruchu Browna B do bariery.

W referacie zostanie podany związek wielowymiarowej własności MY dla $q = \frac{1}{2}$ z czasami dojścia rodziny ruchów Browna $\mathcal{B}_n = \{B_i, i = 1, \ldots, n\}$ do bariery, będący uogólnieniem interpretacji przypadku dwuwymiarowyego. Dokładniej, zostanie podany dowód wielowymiarowej własności MY dla $q = \frac{1}{2}$ oparty jedynie o własności ruchu Browna, przy czym rodzina $\mathcal{B}_n$ będzie w całości zdefiniowana w terminach wyjściowego ruchu Browna B. Prezentowane wyniki zostały otrzymane wspólnie z J. Wesołowskim (2007).

Bibliografia

[1] Letac, G., Wesołowski, J., An independence property for the product of GIG and gamma laws, *Ann. Probab.* **28** (2000)
[2] Massam, H., Wesołowski, J., The Matsumoto-Yor property on trees, *Bernoulli* **10** (2004)
[3] Massam, H., Wesołowski, J., The Matsumoto-Yor property and the structure of the Wishart distribution. *J. Multiv. Anal.* **97** (2006)
[4] Matsumoto, H., Yor, M., An analogue of Pitman's $2M - X$ theorem for exponential Wiener functionals. Part II: The role of the generalized inverse Gaussian laws, *Nagoya Math. J.* **162** (2001)
[5] Matsumoto, H., Yor, M., Interpretation via Brownian motion of some independence properties between GIG and gamma variables, *Statist. Probab. Lett.* **61** (2003)
[6] Wesołowski, J., The MY independence property for GIG and Gamma laws, revisited, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **133** (2002)
[7] Wesołowski, J., Witkowski, P., Hitting times of Brownian motion and the Matsumoto-Yor property on trees, *Stoch. Proc. Appl.*, **117** (2007)

Oleksandr Zaihraiev
Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń

O wielkich odchyleniach dowolnego rzędu sum niezależnych wektorów losowych w przypadku spełnienia warunku Craméra

Niech ξ, $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$, … będą niezależnymi wektorami losowymi o wartościach w $\mathbb{R}^d$, $d > 1$, i jednakowym istotnie d-wymiarowym rozkładzie F. Niech $f(\lambda)$ będzie funkcją generującą momenty, czyli

$$f(\lambda) = E\mathrm{e}^{\langle\lambda,\xi\rangle} = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{\langle\lambda,x\rangle} F(\mathrm{d}x),$$

gdzie $\langle\cdot,\cdot\rangle$ oznacza zwykły iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^d$. Mówimy, że rozkład F spełnia warunek Craméra wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^d : \ f(\lambda) < \infty\}$$

zawiera niepusty zbiór otwarty. Oznaczmy przez $H(x)$ transformatę Fenchela-Legendre'a funkcji $\ln f(\lambda)$, czyli

$$H(x) = \sup_{\lambda\in\Lambda} \left[\langle\lambda, x\rangle - \ln f(\lambda)\right], \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Jak wiadomo funkcja ta, nazywana też funkcją odchyleń odpowiadającą wektorowi ξ, w przypadku spełnienia warunku Craméra odgrywa decydującą rolę przy badaniu wielkich odchyleń dowolnego rzędu sum $S_n = \xi^{(1)} + \ldots + \xi^{(n)},\ n > 1$.

Niech $a = E\xi$. Ponieważ $ES_n = an$, to przy $n \to \infty$ wartość $x^{(n)}$, którą przyjmuje suma S_n, nazywa się

- normalnym odchyleniem tej sumy od najbardziej prawdopodobnej wartości an, jeśli $|x^{(n)} - an| = O(\sqrt{n})$,
- umiarkowanie wielkim odchyleniem sumy S_n od an, jeśli $|x^{(n)} - an| >> \sqrt{n},\ |x^{(n)} - an| = o(n)$,
- wielkim odchyleniem sumy S_n od an, jeśli $|x^{(n)} - an|$ ma rząd cn,
- superwielkim odchyleniem, jeśli $n^{-1}|x^{(n)} - an| \to \infty$

($|\cdot|$ oznacza zwykłą normę Euklidesową w $\mathbb{R}^d$).

Wystąpienie zostanie poświęcone badaniu asymptotyki gęstości rozkładu sumy S_n dla pewnych rodzin rozkładów F w przypadku wielkich i superwielkich odchyleń.

Ryszard Zieliński
Instytut Matematyczny Polskiej
Akademii Nauk, Warszawa

Wygładzanie dystrybuanty empirycznej

Rozpatrujemy nieparametryczny model statystyczny z rodziną $\mathcal{F}$ wszystkich ciągłych dystrybuant. Na podstawie próby $X_1, \ldots, X_n$ z rozkładu o pewnej nieznanej dystrybuancie $F \in \mathcal{F}$ chcemy oszacować F. Standardowym estymatorem jest dystrybuanta empiryczna $F_n(x) = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} 1_{(-\infty,x]}(X_j)$. Dokładność estymatora jest opisana nierównością Dvoretzkiego-Kiefera-Wolfowitza (DKW)

$$P_F\{||F_n - F||_\infty > \varepsilon\} < 2\exp\{-2n\varepsilon^2\}$$

pozwalająca na wyznaczenie takiego n, żeby błąd estymacji z zadanym prawdopodobieństwem nie przekraczał zadanej liczby. Nierówność DKW pozwala również obliczać przedziały ufności dla F.

Ale F_n jest funkcją schodkową więc wydaje się, że jej wygładzenie przynajmniej do funkcji ciągłej będzie w bardziej naturalny sposób odpowiadało estymacji ciągłej funkcji F. Okazuje się, że po wygładzeniu za pomocą jąder (kern estimators) nie jest możliwe uzyskanie nierówności typu DKW.

Bibliografia

[1] Zieliński, R. (2007) Kernel estimators and the Dvoretzky-Kiefer-Wolfowitz inequality. Applicationes Mathematicae 34,3

Bartosz Ziemkiewicz
Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Słaba aproksymacja całki względem ułamkowego procesu Wienera

W pracy [1] udowodnione zostało istnienie i podstawowe własności całki $\int_0^t A_s dW_s^H$, gdzie W^H jest ułamkowym procesem Wienera z wykładnikiem Hursta $H > 1//2$, a A jest procesem o skończonej q-wariacji całkowej $\widetilde{V}_q(A)_T$ dla $q < (1-H)^{-1}$. (Mówimy, że proces A ma skończoną q-wariację całkową na $[0,T]$, jeżeli

$$\widetilde{V}_q(A)_T = \sup_\pi \left(\sum_{t_i \le T} E|A_{t_i} - A_{t_{i-1}}|^q \right)^{1//q} < \infty,$$

gdzie supremum bierzemy po wszystkich podziałach π przedziału $[0,T]$).

W komunikacie rozważać będziemy problem słabej aproksymacji całki $\int_0^t A_s dW_s^H$. Niech $\{A^n\}$ będzie ciągiem procesów o skończonej q-wariacji całkowej, a $\{W^{H,n}\}$ ciągiem scentrowanych procesów gaussowskich spełniających warunek

$$E|W_{t_2}^{H,n} - W_{t_1}^{H,n}|^2 \leq C|t_2 - t_1|^{2H} \qquad (*)$$

dla wszystkich $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$, gdzie $C > 0$ jest dowolną stałą.

Pokażemy, że jeżeli $(A^n, W^{H,n}) \xrightarrow{\mathcal{D}} (A, W^H)$ w $\mathcal{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2)$, to

$$\left(W^{H,n}, \int_0^{\cdot} A_s^n dW_s^{H,n}\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \left(W^H, \int_0^{\cdot} A_s dW_s^H\right)$$

w $\mathcal{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2)$.

Podamy również przykłady słabych aproksymacji ułamkowego procesu Wienera spełniających warunek $(*)$.

Bibliografia

[1] Słomiński L., Ziemkiewicz B. (2005) *Inequalities for the $\mathbb{L}^p$ norms of integrals with respect to a fractional Brownian motion*, Statist. Probab. Lett., 73, 79–90.
[2] Słomiński L., Ziemkiewicz B. (2007) *On weak approximations of integrals with respect to fractional Brownian motion*, preprint.

Jakub Zwierz
Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław

Początkowe rozszerzenia filtracji i entropia kompensatorów losowych miar Poissona

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, zaś $(E, \mathcal{E})$ standardową przestrzenią borelowską. Zakładamy, że $\mathbb{F}$ jest filtracją generowaną przez jednorodną losową miarę Poissona μ na $\mathbb{R}_+ \times E$. Ponadto, niech $\mathbb{G}$ będzie rozszerzeniem $\mathbb{F}$ postaci:

$$\mathcal{G}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s \vee \sigma(G)$$

gdzie G jest zmienną losową. Rozważamy martyngały zdefiniowane jako:

$$X_t = \int_0^t \int_E \psi(s,z) \mu^{\mathbb{F}}(dz, ds) \tag{1}$$

gdzie $\mu^{\mathbb{F}}$ oznacza skompensowaną względem filtracji $\mathbb{F}$ miarę μ. Pokażemy związek pomiędzy entropią kompensatorów μ względem $\mathbb{G}$ i $\mathbb{F}$ oraz tzw. *mutual information* pomiędzy oryginalną filtracją i $\sigma(G)$. Następnie rozważymy dla martyngałów postaci (1) zanurzenie $\mathcal{H}^2(\mathbb{F}) \hookrightarrow \mathcal{S}^1(\mathbb{G})$ i zbadamy jego ciągłość.

Bibliografia

[1] S. Ankirchner, J. Zwierz (2008) Initial enlargement of filtrations and entropy of Poisson compensators
[2] S. Ankirchner (2007) On filtration enlargements and purely discontinuous martingales

Tomasz Żak
Instytut Matematyki i Informatyki
Politechnika Wrocławska

Teoria potencjału ruchu Browna na przestrzeniach hiperbolicznych

Klasycznym zadaniem teorii potencjału jest podanie dokładnych wzorów, opisujących jądro Poissona oraz funkcję Greena regularnego podzbioru n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej. Jak zauważył J. Doob, oba te zadania można sformułować w języku ruchu Browna, a wówczas do ich rozwiązania można stosować metody procesów stochastycznych. Co więcej, rozwiązanie tych zadań wymaga często zbadania bardzo subtelnych własności ruchu Browna.

W ostatnich latach pojawiło się wiele prac, w których badano ruch Browna w przestrzeniach hiperbolicznych (prace takich matematyków jak Bougerol, Matsumoto czy Yor). Okazało się bowiem, że niektóre wyniki, na przykład dotyczące czasu dotarcia hiperbolicznego ruchu Browna do brzegu półprzestrzeni, są ściśle związane z geometrycznym ruchem Browna i mogą znaleźć zastosowanie na przykład w matematyce finansowej.

W referacie omówię wyniki uzyskane w pracach [1] - [5], gdzie podano dokładne wzory lub oszacowania jądra Poissona i funkcji Greena półprzestrzeni i kul, zarówno w rzeczywistych, jak i w zespolonych przestrzeniach hiperbolicznych. Okazało się także, że lepsze zrozumienie zespolonego hiperbolicznego ruchu Browna pozwoliło odpowiedzieć na jedno ze ściśle analitycznych pytań, sformułowanych przez W. Rudina w jego monografii *Function Theory in the Unit Ball of* $\mathbb{C}^n$.

Bibliografia

[1] T. Byczkowski, P. Graczyk, A. Stós (2007) Poisson kernel of half-spaces in real hyperbolic spaces, Rev. Math. Iberoamericana 23, 85-126.
[2] T. Byczkowski, M. Ryznar (2006) Hitting distributions of geometric Brownian motion, Studia Math. 173, 19-38.
[3] T. Byczkowski, J. Małecki (2007) Poisson kernel and Green function of the ball in real hyperbolic spaces, Potential Anal. 27, 1-26.
[4] P. Graczyk, T. Żak (2007) Rudin's question and complex hyperbolic Brownian motion, preprint
[5] T. Żak (2007) Poisson kernel and Green function of balls for complex hyperbolic Brownain motion, Studia Math. 183, 161-193.