Analiza Szeregów Czasowych - Kolokwium, 14 kwietnia 2015
Suma punktów: 18

1. Niech $(X_t)_{t\in Z}$ będzie szeregiem takim, że $X_t = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}$, gdzie ε_t - $WN(0, \sigma^2)$.
(i) (2 p.) Znaleźć gęstość spektralną procesu (X_t) w postaci rzeczywistej.
(ii) (1 p.) Znaleźć miejsca zerowania się gęstości spektralnej i jej maksimum.
2. Niech $(X_t)_{t\in Z}$ będzie procesem AR(2) o o średniej 0 spełniającym równanie (ε_t - $WN(0, \sigma^2)$)

$$X_t - 0,8X_{t-1} + 0,15X_{t-2} = \varepsilon_t.$$

(i) (1 p.) Sprawdzić, że (X_t) jest kauzalny.
(ii) (2 p.) Znaleźć przedstawienie kauzalne procesu (X_t) ($\phi(z) = \prod_{i=1}^{p}(1 - a_i^{-1}z)$, a_i - pierwiastki $\phi(z)$) .
(iii) (1 p.) Obliczyć i uzasadnić wartość błędu predykcji X_t na podstawie $\mathcal{H}_{t-1}(X_t)$.
3. Szereg $(X_t)_{t\in Z}$ zadany jest wzorem $X_t = \sin(\varepsilon_t\pi)\sin(\varepsilon_{t-1}\pi)$; ε_t jest silnym $WN(0, \sigma^2)$ takim, że ε_t ma rozkład jednostajny na przedziale $[-1, 1]$.
(i)(2 p.) Obliczyć $\gamma(0)$;
(ii) (1 p.) Obliczyć $\gamma(1)$;
(iii) (1 p.) Obliczyć $\gamma(h)$ dla $h > 1$;
4. Niech $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$ będzie stacjonarnym procesem AR(1) z $|\phi| > 1$.
(i)(1 p.) Korzystając z przedstawienia $X_t = \phi^{-1}(X_{t+1} - \varepsilon_{t+1})$ wyprowadzić jego reprezentację w postaci procesu liniowego;
(ii) (2 p.) Obliczyć funkcję kowariancji i korelacji procesu (X_t);
(iii) (1 p.) Z funkcją korelacji jakiego procesu kauzalnego pokrywa się funkcja korelacji procesu (X_t)?
5. (3 p.) Niech f_X i f_Y będą gęstościmi spektralnymi procesów (X_t) i (Y_t) odpowiednio, takimi, że $f_X(t) \geqslant f_Y(t)$ dla wszystkich $t \in [-\pi, \pi]$. Uzasadnić, że jeśli $\mathbf{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)'$ i $\mathbf{Y}_n = (Y_1, \ldots, Y_n)'$ i $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, to $\mathrm{Var}(\mathbf{a}'\mathbf{X}_n) \geqslant \mathrm{Var}(\mathbf{a}'\mathbf{Y}_n)$.