Analiza Szeregów Czasowych - Kolokwium , 17 kwietnia 2012
Suma punktów : 16

1. Niech $(X_t)_{t\in Z}$ będzie procesem sss o dystrybuancie spektralnej

$$F_X(\lambda) = (\pi + \lambda) I_{[-\pi,-\pi/3)\cup[\pi/3,\pi]}(\lambda) + \pi I_{[-\pi/3,\pi/3)}(\lambda)$$

(i) (1 p.) Obliczyć $\gamma_X(1)$.
(ii) (2p.) Znaleźć liczbę naturalną d, taką, żeby proces zróżnicowany z krokiem d $Y_t = X_t - X_{t-d}$ miał gęstość spektralną.
2. Niech $(X_t)_{t\in Z}$ będzie procesem sss o o średniej 0 spełniającym równanie

$$X_t = \phi X_{t-12} + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-12},$$

gdzie $|\phi|, |\theta| < 1$.
(i) (2 p.) Obliczyć $\gamma_X(0)$ i $\gamma_X(12)$.
(ii) (1 p.) Obliczyć wartości $\gamma_X(12h)$ dla $|h| > 1$.
(iii) (1 p.) Obliczyć wartości $\gamma(h)$ dla $0 < |h| < 12$.
3. Niech X_t będzie procesem sss spełniającym równanie ($|\theta| < 1$)

$$(1 - 0.5B)^3 X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$$

(i) (3p.) Wypisać reprezentację kauzalną tego procesu.
4. Niech X_t będzie procesem MA(1) postaci $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$, gdzie $|\theta| < 1$ i $\tilde{X}_{n+1}$ będzie aproksymacją X_{n+1} opartą o $X_n, \ldots, X_1$ postaci

$$\tilde{X}_{n+1} = -\sum_{j=1}^{n} (-\theta)^j X_{n+1-j}$$

(i) (3p.) Obliczyć $E|X_{n+1} - \tilde{X}_{n+1}|^2$.
Wskazówka. Wykorzystać reprezentację odwracalną procesu X_t.
5. (3p.) Niech X_t będzie procesem ARMA(p,q) spełniajacym równanie $\phi(B)X_t = \theta(B)\varepsilon_t$, gdzie ε_t - WN$(0,\sigma^2)$ i wielomiany $\phi(\cdot)$ i $\theta(\cdot)$ nie mają wspólnych pierwiastków. Udowodnić,

że jeśli X_t jest odwracalny względem ε_t , to $\theta(z) \neq 0$ dla $|z| \leqslant 1$.

Przypomnienie:

Jeśli

$$X_t = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i Y_{t-i}$$

gdzie $(\psi_i) \in \ell^1$, to

$$dF_X(\lambda) = |\psi(e^{-i\lambda t})|^2 dF_Y(\lambda),$$

gdzie $\psi(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i z^i$.
Przedstawienie kauzalne X_t względem ε_t:

$$X_t = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i}$$

gdzie $(\psi_i) \in \ell^1$.

Przedstawienie odwracalne X_t względem ε_t:

$$\varepsilon_t = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \pi_i X_{t-i}$$

gdzie $(\pi_i) \in \ell^1$.