Statystyka I semestr zimowy 2017, seria III

1. Niech X będzie zmienną losową o ciągłej i rosnącej dystrybuancie F. Znajdź rozkład zmiennej losowej $F(X)$.

2. Niech U będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0,1]$. Dla dowolnej dystrybuanty F definiujemy uogólnioną funkcję odwrotną

$$F^{-}(x) = \inf\{y\colon F(y) \geq x\}\,.$$

   Pokaż, że zmienna losowa $F^{-}(U)$ ma rozkład o dystrybuancie F.

   Wskazówka: Skorzystaj z nierówności $F^{-}(F(x)) \leq x$ oraz $F(F^{-}(x)) \geq x$.

3. Niech $Y_1, \ldots, Y_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach

$$Y_i \sim \mathcal{N}(x_i^t\beta, \sigma^2) \quad \text{dla } i = 1, \ldots, n\,,$$

   gdzie x_i są znanymi wektorami wymiaru p, β wektorem nieznanych parametrów również wymiaru p a σ^2 nieznaną wariancją. Znajdź $p+1$ - wymiarową statystykę dostateczną dla parametrów β i σ^2.

4. Niech $Y_1, \ldots, Y_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach

$$Y_i \sim \mathrm{Bin}\left(1, \frac{1}{1+\exp[-x_i^t\beta]}\right) \quad \text{dla } i = 1, \ldots, n\,,$$

   gdzie x_i są znanymi wektorami wymiaru p a β wektorem nieznanych parametrów również wymiaru p. ($\mathrm{Bin}(k,q)$ oznacza rozkład dwumianowy z k-próbami i prawdopodobieństwem sukcesu q.) Znajdź p - wymiarową statystykę dostateczną dla β.

5. Niech $h(x)$ będzie dodatnią całkowalną funkcją rzeczywistą. Definiujemy rodzinę gęstości $f(x;\xi,\eta)$ z parametrami $\xi < \eta$ przez

$$f(x;\xi,\eta) = \begin{cases} \frac{h(x)}{\int_\xi^\eta h(x)dx} & \text{for } \ \xi < x < \eta, \\ 0 & \text{w w.p.p}\,. \end{cases}$$

   Niech $(X_1, \ldots, X_n)$ będzie próbą prostą z rozkładu $f(x;\xi,\eta)$. Wykaż, że $(X_{1:n}, X_{n:n})$ jest statystyką dostateczną dla (ξ,η).

Pojęcia i fakty które mogą się przydać przy rozwiązywaniu zadań 3-5:

- Statystyka dostateczna
- Kryterium faktoryzacji
- Rozkład łączny