Egzamin ze Wstępu do matematyki
część zadaniowa 06.02.2020

Rozwiązanie każdego zadania należy zredagować na oddzielnej kartce. Każdą kartkę należy podpisać podając swoje: imię, nazwisko, numer indeksu. ***Wszystkie odpowiedzi należy precyzyjnie uzasadnić.*** *Czas pracy: 1 godz. i 45 minut*

Oznaczenia: Poniżej symbolem $\mathbb{N}$ oznaczany zbiór liczb naturalnych tj. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (przyjmujemy, że zero jest liczbą naturalną).

Zadanie 1. Zbadaj, czy istnieje rodzina mocy continuum złożona z parami rozłącznych podzbiorów mocy continuum zbioru:
(a) $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$.
(b) $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus A$, gdzie A jest dowolnym przeliczalnym podzbiorem płaszczyzny $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Zadanie 2. W zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$, określona jest następująca relacja równoważności $\sim$

$$f \sim g \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \operatorname{rng}(f) = \operatorname{rng}(g)$$

gdzie $\operatorname{rng}(f)$ i $\operatorname{rng}(g)$ oznaczają zbiór wartości funkcji f i g, odpowiednio.

(a) Niech $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie funkcją zadaną warunkami $h(0) = 0$ i $h(n) = 1$, dla $n \geqslant 1$. Jaką moc ma klasa abstrakcji $[h]_\sim$ funkcji h?

(b) Udowodnij, że każda klasa abstrakcji relacji $\sim$ jest albo jednoelementowa, albo ma moc continuum.

(c) Udowodnij, że zbiór ilorazowy (czyli zbiór wszystkich klas abstrakcji) relacji $\sim$ ma moc continuum.

Zadanie 3. Przypomnijmy, że jeśli $\langle Z, \preccurlyeq \rangle$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym, to porządek leksykograficzny $\preccurlyeq_{leks}$ na $Z \times Z$ określony jest wzorem

$$\langle x_1, x_2 \rangle \preccurlyeq_{leks} \langle y_1, y_2 \rangle \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \prec y_1 \quad \vee \quad (x_1 = y_1 \ \wedge \ x_2 \preccurlyeq y_2).$$

Niech $A = [-1, \infty) \cap \mathbb{Q}$. Rozważmy następujące dwa zbiory

$$X = (\mathbb{Q} \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \times \mathbb{Q}), \quad Y = (A \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \times A),$$

oba uporządkowane przez relację $\leqslant_{leks}$ porządku leksykograficznego pochodzącego od naturalnego porządku na liczbach rzeczywistych.

(a) Rozstrzygnij czy zbiory $\langle X, \leqslant_{leks} \rangle$ i $\langle Y, \leqslant_{leks} \rangle$ mają elementy minimalne (jeśli tak to wyznacz je) i czy mają element najmniejszy.

(b) Rozstrzygnij czy porządek $\leqslant_{leks}$ na zbiorze X jest gęsty.

(c) Czy zbiór $\{x \in \mathbb{Q} : 0 \leqslant x < 2\} \times \{1\}$ ma w zbiorze $\langle X, \leqslant_{leks} \rangle$ kres górny? Jeśli tak - wyznacz go.

(d) Czy zbiór $\{x \in \mathbb{Q} : 0 \leqslant x < 2\} \times \{1\}$ ma w zbiorze $\langle Y, \leqslant_{leks} \rangle$ kres górny? Jeśli tak - wyznacz go.