Egzamin ze Wstępu do matematyki
część zadaniowa data

Cas pracy: 120 minut

Oznaczenia: Poniżej symbolem $\mathbb{N}$ oznaczany zbiór liczb naturalnych tj. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (zero jest liczbą naturalną!). Symbolem $\mathbb{N}^+$ oznaczamy zbiór liczb naturalnych **dodatnich**, tj. $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Dla liczb $n, m \in \mathbb{N}^+$ symbol $n|m$ oznacza, że liczba n jest dzielnikiem liczby m, tzn. $n|m \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N})\ m = k \cdot n$.

1. Niech X i Y będą zbiorami rozłącznymi. Udowodnij, że $|X| = |Y|$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka rodzina $\mathcal{F}$ zbiorów dwuelementowych parami rozłącznych, że są spełnione następujące dwa warunki:

(i) Dla każdego $A \in \mathcal{F}$ do zbioru A należy jeden element ze zbioru X i jeden element ze zbioru Y.

(ii) $\bigcup \mathcal{F} = X \cup Y$

2. W zbiorze $(\mathbb{N}^+)^{\mathbb{N}}$ określona jest następująca relacja częściowego porządku:

$$f \preccurlyeq g \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})\ f(n)|g(n).$$

To znaczy, $f \preccurlyeq g$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ liczba $f(n)$ jest dzielnikiem liczby $g(n)$.

(a) Czy zbiór częściowo uporządkowany $\langle (\mathbb{N}^+)^{\mathbb{N}}, \preccurlyeq \rangle$ ma element najmniejszy (wskaż ten element jeśli istnieje lub udowodnij, że takiego elementu nie ma)?

(b) Niech $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$ będzie funkcją zadaną wzorem $f_1(n) = n + 1$, zaś $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$ będzie funkcją stale równą 2, tzn. $f_2(n) = 2$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.
Wyznacz kres górny i kres dolny zbioru $\{f_1, f_2\}$ w zbiorze cześciowo uporządkowanym $\langle (\mathbb{N}^+)^{\mathbb{N}}, \preccurlyeq \rangle$.

(c) Niech $A = \{f \in (\mathbb{N}^+)^{\mathbb{N}} : (\forall n \in \mathbb{N})\ f(n) \geqslant 2\}$. Udowodnij, że zbiór wszystkich elementów minimalnych zbioru A jest mocy continuum.

3. W zbiorze $P(\mathbb{N})$ określona jest następująca relacja równoważności $\equiv$

$$A \equiv B \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } (\forall n \in \mathbb{N})\ 2n \in A \Leftrightarrow 2n \in B.$$

Innymi słowy, $A \equiv B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \cap E = B \cap E$, gdzie $E = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ jest zbiorem wszystkich liczb naturalnych parzystych.

(a) Wyznacz klasę abstrakcji $[E]_{\equiv}$, gdzie E jest zbiorem liczb naturalnych parzystych.

(b) Udowodnij, że każde dwie klasy abstracji relacji $\equiv$ są równoliczne.
(*Wskazówka:* Wykaż, że każda klasa abstracji tej relacji jest mocy continuum.)

(c) Udowodnij, że zbiór ilorazowy $P(\mathbb{N})/_{\equiv}$ (czyli zbiór wszystkich klas abstrakcji) jest mocy continuum.