TEST ZE WSTĘPU DO MATEMATYKI

5 lutego 2018

Odpowiedzi należy udzielić na załączonym **arkuszu odpowiedzi**.
W zad. 3-8 każdy podpunkt wymaga jednej z odpowiedzi: TAK lub NIE.
Czas pracy: **70 minut**.

Zadanie 1. Podaj definicję zbioru potęgowego danego zbioru Z.

Zadanie 2. Podaj definicję kresu górnego danego podzbioru X zbioru częściowo uporządkowanego $\langle A, \preccurlyeq \rangle$.

Zadanie 3. Dla $w, r \in \mathbb{R}$ niech

$$A_{w,r} = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : (x-w)^2 + (y-w)^2 \leq r^2\}.$$

Prawdą jest, że:

(a) $\bigcup_{w\in\mathbb{R}} \bigcap_{r>0} A_{w,r} = \emptyset$,

(b) $\bigcap_{r>0} \bigcup_{w\in\mathbb{R}} A_{w,r} = \bigcup_{w\in\mathbb{R}} \bigcap_{r>0} A_{w,r}$,

(c) $\bigcup_{r>0} \bigcap_{w\in\mathbb{R}} A_{w,r} = \emptyset$,

(d) $\bigcap_{w\in\mathbb{R}} \bigcup_{r>0} A_{w,r} = \bigcup_{r>0} \bigcap_{w\in\mathbb{R}} A_{w,r}$.

Zadanie 4. Istnieją takie funkcje $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla funkcji $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ określonej wzorem $F(x) = \langle f_1(x), f_2(x) \rangle$ i zbioru $I = [0, 1]$ zachodzi

(a) $F[I] = I \times I$,

(b) $F^{-1}[I \times I] = I$,

(c) $F[I] = I \times I$, a ponadto funkcja f_1 jest różnowartościowa,

(d) $F^{-1}[I \times I] = I$, a ponadto funkcja f_1 jest różnowartościowa.

Zadanie 5. Prawdą jest, że:

(a) istnieje taki zbiór $X \subseteq \mathbb{R}$, że $|X \times \mathbb{R}| \neq |X|$,
(b) istnieje taki zbiór $X \subseteq \mathbb{R}$, że $|X \times \mathbb{R}| \neq |\mathbb{R}|$,
(c) dla każdego zbioru $X \subseteq \mathbb{R}$, $|X| = |\mathbb{R}|$ lub $|\mathbb{R} \setminus X| = |\mathbb{R}|$,
(d) dla każdego zbioru $X \subseteq \mathbb{R}$, $|X| \geq |\mathbb{N}|$ lub $|\mathbb{R} \setminus X| \geq |\mathbb{N}|$.

Zadanie 6. Niech $A_{k,l}$, gdzie $k, l \in \mathbb{Z}$, będzie zbiorem wszystkich ciągów $\langle a_n : n \in \mathbb{N}\rangle \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ spełniających dla $n \in \mathbb{N}$ warunki

$$\begin{cases} a_0 = k \qquad a_1 = l \\ |a_{n+2}| = |a_{n+1} \cdot a_n|, \end{cases}$$

Istnieją takie $k, l \in \mathbb{Z}$, że zbiór $A_{k,l}$ jest

(a) skończony, o parzystej liczbie elementów,
(b) skończony, o nieparzystej liczbie elementów,
(c) równoliczny z $\mathbb{N}$,
(d) równoliczny z $\mathbb{R}$,

Zadanie 7. Niech X będzie zbiorem mającym 15 elementów. Wtedy:

(a) istnieje relacja równoważności $\equiv$ na X taka, że każda klasa abstrakcji relacji $\equiv$ ma parzystą liczbę elementów,
(b) istnieje relacja równoważności $\equiv$ na Xtaka, że każda klasa abstrakcji relacji $\equiv$ ma nieparzystą liczbę elementów,
(c) istnieje relacja równoważności $\equiv$ na X mająca parzystą liczbę klas abstrakcji,
(d) istnieje relacja równoważności $\equiv$ na X mająca nieparzystą liczbę klas abstrakcji.

Zadanie 8. Niech $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\}$ będzie rodziną tych niepustych podzbiorów $\mathbb{R}$, które są dobrze uporządkowane przez standardowy porządek $\leq$; rodzinę $\mathcal{A}$ porządkujemy przez inkluzję. W zbiorze częściowo uporządkowanym $\langle \mathcal{A}, \subseteq \rangle$

(a) istnieje element minimalny,
(b) istnieje element maksymalny,
(c) istnieje element najmniejszy,
(d) istnieje element największy.