EGZAMIN ZE WSTĘPU DO MATEMATYKI

5.02.2018

Zadanie 1. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona wzorem
$$f(x) = x - \lfloor x \rfloor,$$
gdzie $\lfloor x \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby x.

(a) Wyznacz $f^{-1}[(0,1)]$,

(b) Rozstrzygnij, czy
$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} f[A_{n,m}] = f\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} A_{n,m}\right],$$
gdzie $A_{n,m} = [n, n + \frac{1}{m}]$ dla $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Zadanie 2. W zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ wszystkich nieskończonych ciągów o wyrazach naturalnych definiujemy relację równoważności $\equiv$ następująco
$$f \equiv g \iff \Big(|f[\mathbb{N}]| = |g[\mathbb{N}]| \wedge |\mathbb{N} \setminus f[\mathbb{N}]| = |\mathbb{N} \setminus g[\mathbb{N}]|\Big) \qquad \text{dla } f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}.$$

(a) Niech M będzie zbiorem wszystkich ciągów $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ściśle rosnących. Rozstrzygnij, czy dla dowolnego $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ istnieje $g \in M$ taki, że $f \equiv g$.

(b) Znajdź moc klasy abstrakcji $[f]_{\equiv}$, gdzie $f(n) = 2n + 1$ dla $n \in \mathbb{N}$.

(c) Znajdź moc zbioru ilorazowego $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/_{\equiv}$ relacji $\equiv$.

Zadanie 3. Dla funkcji $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ rozważmy rodzinę
$$\mathcal{A}_f = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \setminus \{\emptyset\} : f|A \text{ jest różnowartościowa}\};$$
rodzinę $\mathcal{A}_f$ porządkujemy przez inkluzję.

(a) Udowodnij, że dla dowolnej funkcji $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, zbiór elementów minimalnych w $\langle \mathcal{A}_f, \subseteq \rangle$ jest równoliczny z $\mathbb{N}$.

(b) Udowodnij, że w zbiorze częściowo uporządkowanym $\langle \mathcal{A}_f, \subseteq \rangle$ istnieje element największy wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f jest różnowartościowa.

(c) Funkcje $g_1, g_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ określone są odpowiednio wzorami
$$g_1(k) = k^2, \qquad g_2(k) = k \bmod 2,$$
gdzie $k \bmod 2$ oznacza resztę z dzielenia liczby k przez 2. Rozstrzygnij, czy zbiory częściowo uporządkowane $\langle \mathcal{A}_{g_1}, \subseteq \rangle$ i $\langle \mathcal{A}_{g_2}, \subseteq \rangle$ są izomorficzne.

Przypominamy o podawaniu kompletnych i szczegółowych **uzasadnień**. Każde zadanie prosimy oddać na **oddzielnej, podpisanej kartce**.

Czas pracy: **120 minut**. Powodzenia!