EGZAMIN ZE WSTĘPU DO MATEMATYKI

2.02.2017

Zadanie 1. Niech funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = \cos x$. Wyznacz

(a) $\bigcap_{n=0}^{\infty} f[A_n]$, gdzie $A_n = (n-3, n+4)$,

(b) $\bigcup_{n=0}^{\infty} f[B_n]$, gdzie $B_n = [\pi - \frac{\pi}{2^n}, \pi - \frac{\pi}{2^{n+1}}]$.

Zadanie 2. W rodzinie wszystkich podzbiorów zbioru $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ wprowadzamy relację równoważności $\equiv$ następująco

$$A \equiv B \iff \Big(|A| = |B| \wedge \pi[A] = \pi[B]\Big) \qquad \text{dla } A, B \subseteq \mathbb{N}^2$$

gdzie $\pi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ oznacza rzutowanie na pierwszą oś, tzn. $\pi(x, y) = x$.

(a) Znajdź moc klasy abstrakcji $[A]_\equiv$ zbioru $A = \{1\} \times \mathbb{N}$.

(b) Udowodnij, że jeśli C jest niepustym zbiorem skończonym, to klasa abstrakcji $[C]_\equiv$ jest równoliczna z $\mathbb{N}$.

(c) Znajdź moc zbioru ilorazowego relacji $\equiv$.

Zadanie 3. Niech F będzie zbiorem wszystkich różnowartościowych funkcji f, których dziedzina $\mathrm{dom}(f)$ i zbiór wartości $\mathrm{rg}(f)$ są zawarte w $\mathbb{N}$. Zbiór F jest uporządkowany za pomocą inkluzji, tzn. częściowy porządek $\preceq$ w zbiorze F jest określony następująco

$$f \preceq g \;\Leftrightarrow (\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g) \wedge f = g|\mathrm{dom}(f)).$$

(a) Rozstrzygnij, czy w zbiorze F z porządkiem $\preceq$ istnieje element minimalny.

(b) Znajdź moc zbioru wszystkich elementów maksymalnych w zbiorze F z porządkiem $\preceq$.

(c)* Udowodnij, że w zbiorze częściowo uporządkowanym $\langle F, \preceq\rangle$ istnieje łańcuch mocy continuum.

Przypominamy o podawaniu kompletnych i szczegółowych **uzasadnień**. Każde zadanie prosimy oddać na **oddzielnej, podpisanej kartce**.

Czas pracy: **120 minut**. Powodzenia!