

**Set Theory homework #5**  
**due October 6, 2019**

Korzystając z lematu Kuratowskiego-Zorna udowodnij poniższe stwierdzenia.

**Zadanie 1.** Istnieje rodzina przeliczalnych podzbiorów zbioru  $\mathbb{R}$ , liniowo uporządkowana za pomocą inkluzji, której suma jest nieprzeliczalna.

**Zadanie 2.** Dla każdego liniowo uporządkowanego zbioru  $(A, \leq)$  istnieje zbiór  $B \subseteq A$  o następujących własnościach:

1. relacja  $\leq|B$  dobrze porządkuje zbiór  $B$ ,
2.  $\forall a \in A \exists b \in B (a \leq b)$ .

**Zadanie 3.** Dla każdego zbioru  $A$  i relacji  $\preceq$ , częściowo porządkującej zbiór  $A$ , istnieje relacja  $\leq$  liniowo porządkująca ten zbiór, która jest rozszerzeniem relacji  $\preceq$  (tzn.  $\forall a, b \in A (a \preceq b \Rightarrow a \leq b)$ ).

**Zadanie 4.** Istnieje podział zbioru  $\mathbb{R}^+$  wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych na dwa niepuste, rozłączne zbiory  $A_1, A_2$ , z których każdy jest zamknięty ze względu na działanie dodawania (tzn.  $\forall a, b \in A_i a + b \in A_i$ ).