Set Theory homework #4

due October 30, 2019

Zadanie 1. Udowodnij, że jeśli α jest dowolną graniczną (niezerową) liczbą porządkową, to $1^\alpha + 2^\alpha = 3^\alpha$.

Zadanie 2. Udowodnij, że jeśli α jest dowolną liczbą porządkową taką, że $\omega \leqslant \alpha < \omega^\omega$, to

$$\alpha^\omega = \omega^\omega.$$

Zadanie 3. Niech n, m będą dowolnymi dodatnimi liczbami naturalnymi. Udowodnij, że

$$(\omega + n)^m = \omega^m + \omega^{m-1} \cdot n + \ldots + \omega \cdot n + n.$$

Zadanie 4. Udowodnij, że jeśli

$$\gamma = \omega^{\beta_1} \cdot n_1 + \ldots + \omega^{\beta_k} \cdot n_k,$$

gdzie $\beta_1 > \ldots > \beta_k$ i $0 < n_1, \ldots, n_k < \omega$, to $\gamma \cdot \omega = \omega^{\beta_1 + 1}$. Wyciągnij stąd wniosek, że jeśli $\alpha \geqslant \omega^{\beta_1+1}$, to $\gamma + \alpha = \alpha$.