

Wykład 13. Lemat Kuratowskiego-Zorna.

W wykładzie 10 wspomnieliśmy o lemacie Kuratowskiego-Zorna – twierdzeniu, podającym pewien warunek dostateczny istnienia elementu maksymalnego w danym zbiorze częściowo uporządkowanym. Twierdzenie to ma liczne zastosowania w wielu działach matematyki, gdzie wykorzystuje się je w dowodach istnienia różnych obiektów matematycznych. Mianowicie, czasem okazuje się, że szukany obiekt jest właśnie elementem maksymalnym pewnego zbioru częściowo uporządkowanego. Wtedy problem istnienia tego obiektu sprowadza się do pytania o to, czy w danym zbiorze istnieje element maksymalny. W tym wykładzie zetkniemy się z kilkoma tego rodzaju sytuacjami.

Przypomnijmy, że łańcuchem w zbiorze X , częściowo uporządkowanym przez relację $\preceq$ nazywamy dowolny podzbiór $L \subseteq X$ liniowo uporządkowany przez relację $\preceq|L$, w szczególności podzbiór pusty.

Twierdzenie 13.1. (Lemat Kuratowskiego-Zorna). Niech X będzie niepustym zbiorem częściowo uporządkowanym przez relację $\preceq$. Załóżmy, że każdy łańcuch w zbiorze X ma ograniczenie górne w X . Wtedy w zbiorze X istnieje element maksymalny.

W celu lepszego zrozumienia dowodu, przedstawimy tu jego dwa warianty. Pierwszy z nich opiera się bezpośrednio na twierdzeniu Zermelo (zob. twierdzenie 12.13), drugi – korzysta jedynie z głównego lematu (zob. lemat 12.18) użytego w jego dowodzie. W dalszej części tego wykładu podamy jeszcze jeden dowód lematu Kuratowskiego-Zorna, oparty na twierdzeniu o definiowaniu przez indukcję pozaskończoną.

Wprowadźmy teraz oznaczenia, których będziemy używać w obu wariantach dowodu. Dla dowolnego łańcucha L w zbiorze X (dopuszczamy przypadek, gdy $L = \emptyset$) oznaczmy przez $b(L)$ zbiór wszystkich ograniczeń górnych zbioru L ; na mocy założeń lematu Kuratowskiego-Zorna mamy $b(L) \neq \emptyset$ (w szczególności, $b(\emptyset) = X$).

Niech $f : \mathcal{P}(X) \setminus \{X\} \rightarrow X$ będzie funkcją, spełniającą następujące dwa warunki:

- (1) $f(A) \in X \setminus A$, dla dowolnego $A \subsetneq X$,
- (2) $f(L) \in b(L) \setminus L$, o ile L jest łańcuchem w X oraz $b(L) \setminus L \neq \emptyset$.

Zatem funkcja f przyporządkowuje każdemu właściwemu podzbiorowi zbioru X pewien element jego dopełnienia. Dodatkowo, jeśli podzbiór ten jest łańcuchem w X , to funkcja f wybiera pewne jego ograniczenie górne, o ile tylko jest to możliwe (tzn. wtedy, gdy w ogóle ma on ograniczenie górne, które do niego nie należy). Funkcję taką łatwo znaleźć biorąc najpierw dowolną funkcję wyboru g dla rodziny wszystkich niepustych podzbiorów zbioru X , a następnie definiując

$$f(A) = \begin{cases} g(b(A) \setminus A), & \text{jeśli } A \text{ jest łańcuchem w } X \text{ oraz } b(A) \setminus A \neq \emptyset, \\ g(X \setminus A), & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

W obu wariantach dowodu wykorzystamy następującą obserwację.

Lemat 13.2. Niech X będzie zbiorem częściowo uporządkowanym przez relację $\preceq$ i niech L będzie niepustym łańcuchem w X , dla którego w zbiorze X istnieje ograniczenie górne. Jeśli każde ograniczenie górne zbioru L w X należy do L (tzn. $b(L) \subseteq L$), to zbiór L ma element największy i jest on zarazem elementem maksymalnym zbioru X .

Dowód. Niech $x \in X$ będzie dowolnym ograniczeniem górnym łańcucha L . Z założenia wynika, że $x \in L$, więc x jest elementem największym w L . Ponadto, gdyby istniał element $y \in X$ taki, że $x \prec y$, to byłby on także ograniczeniem górnym L oraz $y \notin L$ – otrzymalibyśmy sprzeczność. ■

Dowód lematu Kuratowskiego-Zorna – wariant I.

Z twierdzenia Zermelo (zob. twierdzenie 12.8) wynika, że istnieje dokładnie jeden dobry porządek $\leq$ zbioru X , zgodny z funkcją f . W zbiorze X mamy więc teraz relację dobrego porządku $\leq$ oraz relację częściowego porządku $\preceq$, która spełnia założenia lematu Kuratowskiego-Zorna. Dla uniknięcia nieporozumień, pojęcia związane z porządkami poprzedzamy symbolami odpowiednich relacji (np. element „ $\preceq$ -maksymalny” lub „ $\leq$ -najmniejszy”).

Odcinek początkowy (w sensie porządku $\leq$), wyznaczony przez element $a \in X$, będziemy tu oznaczać symbolem $O_{\leq}(a)$. Zatem $O_{\leq}(a) = \{x \in X : x < a\}$. Ponadto, symbolem $D_{\leq}(a)$ będziemy oznaczać „domknięty” odcinek początkowy $O_{\leq}(a) \cup \{a\}$. Zatem $D_{\leq}(a) = \{x \in X : x \leq a\}$.

Rozpatrzmy teraz dwa przypadki.

Przypadek 1. Porządek $\preceq$ jest liniowy.

Wtedy cały zbiór X jest $\preceq$ -łańcuchem i jego $\preceq$ -ograniczenie górne jest oczywiście elementem $\preceq$ -maksymalnym (a nawet $\preceq$ -największym) zbioru X .

Przypadek 2. Porządek $\preceq$ nie jest liniowy.

Rozważmy wówczas zbiór Y , zdefiniowany następująco

$$Y = \{y \in X : \text{odcinek } D_{\preceq}(y) \text{ nie jest } \preceq\text{-łańcuchem w } X\}.$$

Twierdzimy, że $Y \neq \emptyset$. Pokażemy nawet trochę więcej:

Lemat 13.3. Jeśli zbiór $Z \subseteq X$ nie jest $\preceq$ -łańcuchem, to $Z \cap Y \neq \emptyset$.

Dowód. Skoro zbiór Z nie jest $\preceq$ -łańcuchem, to istnieją $\preceq$ -nieporównywalne elementy $x, y \in Z$. Oczywiście elementy te są $\leq$ -porównywalne; niech na przykład $x < y$. Wtedy $x, y \in D_{\preceq}(y)$, a ponieważ x i y są $\preceq$ -nieporównywalne, więc zbiór $D_{\preceq}(y)$ nie jest $\preceq$ -łańcuchem. Stąd $y \in Z \cap Y$, co kończy dowód lematu. ■

Powracamy do dowodu lematu Kuratowskiego-Zorna. Zatem $Y \neq \emptyset$ i niech a_1 będzie $\leq$ -najmniejszym elementem zbioru Y . Niech $L_1 = O_{\preceq}(a_1)$. Zauważmy, że skoro $a_1 \in Y$, to $|D_{\preceq}(a_1)| \geq 2$, więc $L_1 \neq \emptyset$. Z lematu wynika, że zbiór L_1 jest $\preceq$ -łańcuchem; w przeciwnym razie $L_1 \cap Y \neq \emptyset$, co przeczy wyborowi elementu a_1 .

Twierdzimy, że $b(L_1) \subseteq L_1$ i z lematu 13.2 wynika, że zakończy to dowód.

Przypuśćmy więc, że $b(L_1) \setminus L_1 \neq \emptyset$. Wtedy $f(L_1) \in b(L_1) \setminus L_1$. Ale porządek $\leq$ jest zgodny z funkcją f , więc $f(L_1) = a_1$, a stąd $a_1 \in b(L_1) \setminus L_1$. To oznacza, że

$$\forall y \in L_1 \ (y \prec a_1)$$

i w szczególności, zbiór $D_{\preceq}(a_1)$ jest $\preceq$ -łańcuchem. Zatem $a_1 \notin Y$, wbrew założeniu.

Pierwszy wariant dowodu lematu Kuratowskiego-Zorna jest tym samym zakończony. ■

Dowód lematu Kuratowskiego-Zorna – wariant II.

Niech $\mathcal{R}$ będzie rodziną wszystkich zbiorów $A \subseteq X$ takich, że relacja $\preceq|_A$ jest dobrym porządkiem zbioru A , zgodnym z funkcją f . W szczególności, każdy zbiór $A \in \mathcal{R}$ jest zgodny z funkcją f i dla dowolnego $a \in A$ zachodzi równość $a = f(O_A(a))$, gdzie $O_A(a) = \{x \in A : x \prec a\}$ jest odcinkiem początkowym wyznaczonym w zbiorze A przez element a . Zauważmy, że $\{f(\emptyset)\} \in \mathcal{R}$.

Niech $L_2 = \bigcup \mathcal{R}$; z lematu 12.18 wynika, że porządek $\preceq|_{L_2}$ jest zgodny z funkcją f . Zatem $L_2 \in \mathcal{R}$; w szczególności, zbiór L_2 jest $\preceq$ -łańcuchem. Ponadto, $L_2 \neq \emptyset$, gdyż $f(\emptyset) \in L_2$. Dowód, tak jak w wariancie I, zakończymy pokazując, że $b(L_2) \subseteq L_2$.

Przypuśćmy więc, że $b(L_2) \setminus L_2 \neq \emptyset$. Wówczas $f(L_2) \in b(L_2) \setminus L_2$. Niech $a_2 = f(L_2)$ oraz $A = L_2 \cup \{a_2\}$. Zauważmy, że $A \in \mathcal{R}$, gdyż zbiór A jest dobrze uporządkowany przez relację $\preceq$ oraz $L = O_A(a_2)$ (a_2 jest elementem największym w zbiorze A). Stąd jednak, na mocy definicji zbioru L_2 , mamy $A \subseteq L_2$ i w szczególności $a_2 \in L_2$, co daje sprzeczność.

Tym samym drugi wariant dowodu lematu Kuratowskiego-Zorna jest zakończony. ■

Uwaga. W obu wariantach dowodu znaleźliśmy ten sam, zależący tylko od wyboru funkcji f , element maksymalny zbioru X .

Istotnie, niech ponownie $\leq$ będzie dobrym porządkiem zbioru X , zgodnym z funkcją f . Zachowajmy oznaczenia z obu wariantów dowodu.

Jeśli $L_2 = X$, to w szczególności zbiór X jest liniowo uporządkowany przez relację $\preceq$ i jedynym elementem $\preceq$ -maksymalnym zbioru X jest jego element $\preceq$ -największy.

Jeśli $L_2 \neq X$, to skoro $L_2 \in \mathcal{R}$, z lematu 12.16 wynika, że L_2 jest odcinkiem początkowym w X w sensie porządku $\leq$. Zatem $L_2 = O_{\leq}(a_2)$, gdzie $a_2 = f(L_2)$. W szczególności, jeśli $x < a_2$, to $D_{\leq}(x) \subseteq L_2$; zbiór $D_{\leq}(x)$ jest więc $\preceq$ -łańcuchem, a zatem $x < a_1$. Wynika stąd, że $a_2 \leq a_1$, czyli $L_2 \subseteq L_1$. Ale w trakcie dowodu pokazaliśmy, że elementami $\preceq$ -maksymalnymi w X są elementy $m_1 = \max_{\preceq} L_1$ i $m_2 = \max_{\preceq} L_2$, czyli $\preceq$ -największe elementy, odpowiednio, zbiorów L_1 oraz L_2 . Skoro jednak $L_2 \subseteq L_1$, to $m_2 \leq m_1$, a stąd $m_1 = m_2$.

Zastosowania lematu Kuratowskiego-Zorna.

Pokażemy teraz kilka zastosowań lematu Kuratowskiego-Zorna. W rozpatrywanych przykładach X jest pewną rodziną zbiorów, a $\preceq$ – relacją zawierania w rodzinie X . W takich sytuacjach przydatny bywa następujący wniosek z lematu Kuratowskiego-Zorna.

Twierdzenie 13.4. Niech $\mathcal{X}$ będzie niepustą rodziną zbiorów, częściowo uporządkowaną przez relację zawierania. Załóżmy, że suma każdego niepustego łańcucha w $\mathcal{X}$ należy do rodziny $\mathcal{X}$. Wtedy w rodzinie $\mathcal{X}$ istnieje element maksymalny.

Dowód. Oczywiście, jeśli $\mathcal{L}$ jest łańcuchem w $\mathcal{X}$, to zbiór $D = \bigcup \mathcal{L}$ zawiera każdy ze zbiorów należących do łańcucha $\mathcal{L}$; jeśli więc $D \in \mathcal{X}$, to zbiór D jest ograniczeniem górnym łańcucha $\mathcal{L}$ w rodzinie $\mathcal{X}$. Wynika stąd, że spełnione są założenia lematu Kuratowskiego-Zorna: ograniczeniem górnym dowolnego niepustego łańcucha w $\mathcal{X}$ jest jego suma, a łańcuch pusty jest ograniczony z góry przez każdy element zbioru $\mathcal{X}$. Zatem w rodzinie $\mathcal{X}$ istnieje element maksymalny. ■

Pierwszy przykład zastosowania lematu Kuratowskiego-Zorna dotyczy algebry liniowej.

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K (zgodnie z ogólnie przyjętą definicją zakładamy, że $V \neq \emptyset$). Przypomnijmy, że wektory $v_1, v_2, \dots, v_n$ (gdzie $v_i \neq v_j$, o ile $i \neq j$) przestrzeni V nazywamy wektorami **liniowo niezależnymi**, jeśli dla dowolnego ciągu $t_1, t_2, \dots, t_n$ elementów K , z tego, że

$$t_1 \cdot v_1 + t_2 \cdot v_2 + \dots + t_n \cdot v_n = 0$$

wynika, że

$$t_1 = t_2 = \dots = t_n = 0.$$

W takim przypadku mówimy też, że zbiór wektorów $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ jest zbiorem liniowo niezależnym. Ogólnie, zbiór wektorów przestrzeni V nazywamy **zbiorem liniowo niezależnym**, jeśli każdy jego skończony podzbiór jest liniowo niezależny (przyjmujemy, że pusty zbiór wektorów jest liniowo niezależny).

Jeśli zbiór $B \subseteq V$ jest liniowo niezależny i każdy element przestrzeni V jest kombinacją liniową pewnych wektorów ze zbioru B , to B nazywamy **bazą** przestrzeni V . Problem *istnienia* bazy w dowolnej przestrzeni liniowej można sprowadzić do rozpatrywanego w tym wykładzie zagadnienia istnienia elementów maksymalnych w zbiorach częściowo uporządkowanych dzięki następującej znanej i łatwej do udowodnienia charakteryzacji: *zbiór $B \subseteq V$ jest bazą przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy B jest maksymalnym (w sensie zawierania) podzbiorem liniowo niezależnym tej przestrzeni.*

Twierdzenie 13.5. Każda przestrzeń liniowa ma bazę. Co więcej, każdy zbiór liniowo niezależny w przestrzeni V nad ciałem K jest zawarty w pewnej bazie tej przestrzeni.

Dowód. Niech A będzie dowolnym liniowo niezależnym podzbiorem przestrzeni V (jeśli chcemy udowodnić istnienie jakiejkolwiek bazy, to możemy przyjąć, że $A = \emptyset$). Niech $\mathcal{X}$ będzie rodziną wszystkich liniowo niezależnych podzbiorów przestrzeni V , zawierających zbiór A , częściowo uporządkowaną przez relację inkluzji. Chcemy pokazać, że w rodzinie $\mathcal{X}$ istnieje element maksymalny – będzie on szukaną bazą przestrzeni V . Zbiór $\mathcal{X}$ jest niepusty, gdyż $A \in \mathcal{X}$. Pokażemy, że spełnia on założenia lematu Kuratowskiego-Zorna, a ściślej, jego wersji sformułowanej w twierdzeniu 13.4.

Niech więc $\mathcal{L}$ będzie łańcuchem w zbiorze $\mathcal{X}$. Rodzina $\mathcal{L}$ składa się zatem ze zbiorów liniowo niezależnych i ma następującą własność:

$$A_1, A_2 \in \mathcal{L} \quad \Rightarrow \quad (A_1 \subseteq A_2 \vee A_2 \subseteq A_1).$$

Chcemy pokazać, że zbiór $C = \bigcup \mathcal{L}$ należy do $\mathcal{X}$. Oczywiście $A \subseteq C$, więc wystarczy pokazać, że zbiór C jest liniowo niezależny. Wybierzmy więc skończenie wiele wektorów $v_1, v_2, \dots, v_n \in C$ (zakładamy, że $v_i \neq v_j$, o ile $i \neq j$). Istnieją wtedy zbiory $A_1, A_2, \dots, A_n$ należące do $\mathcal{L}$ takie, że

$$v_1 \in A_1, v_2 \in A_2, \dots, v_n \in A_n.$$

Zbiór $\mathcal{L}$ jest jednak zbiorem liniowo uporządkowanym przez relację inkluzji, a więc wśród zbiorów $A_1, A_2, \dots, A_n$ jest zbiór największy; niech A_i będzie tym największym zbiorem. Wtedy

$$v_1, v_2, \dots, v_n \in A_i.$$

Zatem zbiór $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ jest skończonym podzbiorem zbioru liniowo niezależnego A_i , jest więc liniowo niezależny.

Pokazaliśmy, że każdy skończony podzbiór zbioru C jest liniowo niezależny – sam zbiór C jest więc też liniowo niezależny. Zatem $C \in \mathcal{X}$. Skoro suma każdego łańcucha w $\mathcal{X}$ należy do $\mathcal{X}$, to z lematu Kuratowskiego-Zorna (zob. twierdzenie 13.4) wynika, że w rodzinie $\mathcal{X}$ istnieje element maksymalny; jest on szukaną bazą przestrzeni V . ■

Drugi przykład też pochodzi z algebry. Przypomnijmy (zob. przykład 9.14, punkt (4)), że ideałem w pierścieniu $\mathbb{P} = \langle P, 0, 1, +, \cdot \rangle$ nazywamy zbiór $I \subseteq P$ mający następujące dwie własności:

- (1) jeśli $a, b \in I$, to $a + b \in I$,

(2) jeśli $a \in I$ oraz $b \in P$, to $a \cdot b \in I$.

Przykładem ideału jest zbiór $\{0\}$. Ideał I nazywamy **ideałem właściwym**, jeśli $I \neq P$. Ideał właściwy I nazywamy **ideałem maksymalnym**, jeśli nie jest zawarty w żadnym innym ideale właściwym pierścienia $\mathbb{P}$.

Twierdzenie 13.6. Każdy ideał właściwy I w pierścieniu $\mathbb{P}$ jest zawarty w pewnym ideale maksymalnym.

Dowód. Niech $\mathcal{X}$ będzie rodziną wszystkich ideałów właściwych pierścienia $\mathbb{P}$ zawierających ideał I , częściowo uporządkowaną przez relację inkluzji. Chcemy pokazać, że w rodzinie $\mathcal{X}$ istnieje element maksymalny – będzie on szukanym ideałem maksymalnym pierścienia $\mathbb{P}$. Zbiór $\mathcal{X}$ jest niepusty, gdyż $I \in \mathcal{X}$. Pokażemy, że spełnia on założenia lematu Kuratowskiego-Zorna, a ściślej, jego wersji sformułowanej w twierdzeniu 13.4.

Niech więc $\mathcal{L}$ będzie łańcuchem w zbiorze $\mathcal{X}$. Rodzina $\mathcal{L}$ składa się zatem z ideałów pierścienia $\mathbb{P}$ i ma następującą własność:

$$I_1, I_2 \in \mathcal{L} \quad \Rightarrow \quad (I_1 \subseteq I_2 \vee I_2 \subseteq I_1).$$

Chcemy pokazać, że zbiór $J = \bigcup \mathcal{L}$ należy do $\mathcal{X}$. Oczywiście $I \subseteq J$, więc wystarczy pokazać, że zbiór J jest ideałem właściwym. Musimy więc sprawdzić, że $J \neq P$ oraz ma on własności (1) i (2).

Zauważmy najpierw, że ideał I pierścienia P jest właściwy wtedy i tylko wtedy, gdy $1 \notin I$. Ponieważ wszystkie ideały należące do łańcucha $\mathcal{L}$ są właściwe, więc $1 \notin J$.

- (1) Niech $a, b \in J$. Istnieją wtedy ideały I_1 i I_2 należące do $\mathcal{L}$ takie, że $a \in I_1$ oraz $b \in I_2$. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $I_1 \subseteq I_2$. Wtedy $a, b \in I_2$, skąd wynika, że $a + b \in I_2$. Zatem $a + b \in J$.
- (2) Niech $a \in J$ i $b \in P$. Istnieje wtedy ideał $I_1 \in \mathcal{L}$ taki, że $a \in I_1$. Wtedy $a \cdot b \in I_1$, skąd wynika, że $a \cdot b \in J$.

Pokazaliśmy, że zbiór J jest ideałem. Zatem $I \in \mathcal{X}$. Skoro suma każdego łańcucha w $\mathcal{X}$ należy do $\mathcal{X}$, to z lematu Kuratowskiego-Zorna (zob. twierdzenie 13.4) wynika, że w rodzinie $\mathcal{X}$ istnieje element maksymalny. ■

Następny przykład pochodzi z teorii mnogości. Udowodnimy zapowiadane pod koniec wykładu 6 twierdzenie, które pozwala porównywać *dowolne* zbiory pod względem liczby elementów. Dokładniej, dla danych zbiorów A, B chcielibyśmy stwierdzić, że $|A| \leq |B|$, bądź że $|B| \leq |A|$. Zauważmy, że mamy tu znów do czynienia z problemem *istnienia*: pytamy, czy *istnieje* funkcja $h_1 : A \xrightarrow{1-1} B$ bądź funkcja $h_2 : B \xrightarrow{1-1} A$. Okaże się, że i ten problem uda się sprowadzić do zagadnienia istnienia elementu maksymalnego w pewnym zbiorze częściowo uporządkowanym.

Twierdzenie 13.7. Dla dowolnych zbiorów A i B zachodzi co najmniej jedna z dwóch nierówności $|A| \leq |B|$ lub $|B| \leq |A|$.

Dowód. Rozważmy zbiór X składający się z funkcji f o następujących własnościach:

- (1) $D_f \subseteq A$;
- (2) $R_f \subseteq B$;
3. f jest różnowartościowa.

Zbiór X jest niepusty, gdyż należy do niego funkcja pusta. Ponieważ jego elementy są podzbiorami zbioru $A \times B$, więc X jest rodziną zbiorów, częściowo uporządkowaną przez relację inkluzji. Zauważmy, że dla funkcji $f, g \in X$ mamy:

$$f \subseteq g \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } g|_{D_f} = f.$$

Zatem funkcja g jest większa w rozpatrywanym sensie od funkcji f , jeśli jest jej właściwym przedłużeniem. Wynika stąd, że funkcja $h \in X$ jest elementem maksymalnym w zbiorze X wtedy i tylko wtedy, gdy nie można jej dalej przedłużyć w sposób różnowartościowy do funkcji o dziedzinie zawartej w A i zbiorze wartości zawartym w B . Pokażemy, że zachodzi to jedynie wtedy, gdy $D_h = A$ lub $R_h = B$.

Dla dowodu założmy najpierw, że $D_h = A$ lub $\text{rg}(h) = B$ oraz g jest dowolnym różnowartościowym przedłużeniem funkcji h , takim że $D_g \subseteq A$ oraz $R_g \subseteq B$.

Jeśli $D_h = A$, to z inkluzji $D_h \subseteq D_g \subseteq A$ wynika, że $D_g = D_h$, a stąd $g = h$.

Jeśli $R_h = B$, to z inkluzji $R_h \subseteq R_g \subseteq B$ wynika, że $R_g = B$. Przypuśćmy teraz, że $D_h \subsetneq D_g$ i weźmy dowolny element $a_1 \in D_g \setminus D_h$. Skoro $R_h = B$, to istnieje element $a_2 \in D_h$, taki że $h(a_2) = g(a_1)$. Ale $g|_{D_h} = h$, więc $h(a_2) =$

$g(a_2)$. Wskazaliśmy więc dwa różne elementy a_1 i a_2 , dla których $g(a_2) = g(a_1)$, co przeczy różnowartościowości funkcji g . Zatem i w tym przypadku musi być $D_g = D_h$, skąd $g = h$.

Teraz załóżmy, że funkcja $h \in X$ jest elementem maksymalnym w zbiorze X . Przypadek, że $D_h \neq A$ i $R_h \neq B$ jest wówczas niemożliwy. Przypuśćmy bowiem, że $a \in A \setminus D_h$ oraz $b \in B \setminus R_h$. Wtedy zbiór $h \cup \{\langle a, b \rangle\}$ jest funkcją różnowartościową, należącą do zbioru X i większą od h , co przeczy maksymalności h .

Pokazaliśmy więc, że funkcja $h \in X$ jest elementem maksymalnym w zbiorze X wtedy i tylko wtedy, gdy $D_h = A$ lub $R_h = B$. Jeśli jednak $D_h = A$, to wówczas oczywiście $h : A \xrightarrow{1-1} B$, co dowodzi, że $|A| \leq |B|$. Jeśli natomiast $R_h = B$, to wtedy $h^{-1} : B \xrightarrow{1-1} A$, co z kolei pokazuje, że $|B| \leq |A|$.

Na odwrót, jeśli $|A| \leq |B|$ i $h_1 : A \xrightarrow{1-1} B$, to $h_1 \in X$ oraz $D_{h_1} = A$, więc funkcja h_1 jest elementem maksymalnym w zbiorze X ; jeśli natomiast $|B| \leq |A|$ i $h_2 : B \xrightarrow{1-1} A$, to $h_2^{-1} \in X$ oraz $R_{h_2^{-1}} = B$, zatem funkcja h_2^{-1} jest elementem maksymalnym w X .

Nasze zadanie sprowadza się zatem do wykazania, że w zbiorze X istnieje element maksymalny.

Sprawdźmy założenia lematu Kuratowskiego-Zorna (w wersji z twierdzenia 13.4). Niech więc L będzie łańcuchem w zbiorze X . Zbiór L składa się zatem z funkcji należących do zbioru X i ma następującą własność:

$$f_1, f_2 \in L \quad \Rightarrow \quad (f_1 \subseteq f_2 \vee f_2 \subseteq f_1).$$

Chcemy pokazać, że zbiór $h = \bigcup L$ należy do X .

Oczywiście, zbiór h jest relacją o dziedzinie lewostronnej zawartej w A i dziedzinie prawostronnej zawartej w B . Wystarczy więc sprawdzić, że h jest funkcją oraz, że jest to funkcja różnowartościowa.

Żeby udowodnić, że relacja h jest funkcją, weźmy dowolne pary $\langle x, y_1 \rangle$ i $\langle x, y_2 \rangle$ należące do h i mające ten sam poprzednik x . Istnieją wtedy funkcje f_1, f_2 należące do L takie, że $\langle x, y_1 \rangle \in f_1$ oraz $\langle x, y_2 \rangle \in f_2$. Zbiór L jest jednak zbiorem liniowo

uporządkowanym przez relację inkluzji, a więc jedna z funkcji f_1, f_2 zawiera drugą. Wynika stąd, że $\langle x, y_1 \rangle, \langle x, y_2 \rangle \in f$, gdzie $f \in X$ jest większą z funkcji f_1, f_2 . Ale wtedy $y_1 = f(x)$ oraz $y_2 = f(x)$, a stąd $y_1 = y_2$. Pokazaliśmy więc, że relacja h jest funkcją.

Żeby pokazać, że funkcja h jest różnowartościowa, weźmy dowolne pary $\langle x_1, y \rangle$ i $\langle x_2, y \rangle$ należące do h i mające tym razem ten sam następnik y . Podobnie jak poprzednio stwierdzamy, że $\langle x_2, y \rangle, \langle x_1, y \rangle \in f$ dla pewnej funkcji $f \in X$. Ale wtedy $y = f(x_1)$ oraz $y = f(x_2)$, a stąd $x_1 = x_2$, gdyż funkcja f jest różnowartościowa. Pokazaliśmy więc, że funkcja h jest różnowartościowa, co kończy dowód tego, że $h \in X$.

Skoro suma każdego łańcucha w X należy do X , to z lematu Kuratowskiego-Zorna (zob. twierdzenie 13.4) wynika, że w zbiorze X istnieje element maksymalny. Jak stwierdziliśmy wcześniej, dowodzi to, że $|A| \leq |B|$ lub $|B| \leq |A|$. ■

Jeszcze innym ciekawym zastosowaniem lematu Kuratowskiego-Zorna w teorii mnogości jest oparty na nim pomysłowy dowód wspomnianego w wykładzie 7 twierdzenia Hessenberga, mówiącego, że każdy zbiór nieskończony T ma tę własność, że $T \times T \sim T$. Dowód ten pokażemy w dodatku E.

Jeszcze jeden dowód lematu Kuratowskiego-Zorna.

Przedstawimy teraz obiecany szkic alternatywnego dowodu lematu Kuratowskiego-Zorna. Ponieważ oparty jest on na twierdzeniu o definiowaniu przez indukcję pozaskończoną, wydaje się pouczające przeprowadzenie go najpierw przy dodatkowym założeniu, że $X = \mathbb{N}$. W tym przypadku wystarczy skorzystać z twierdzenia o indukcyjnym definiowaniu ciągów określonych na $\mathbb{N}$ – por. twierdzenie 4.15).

Przykład 13.8 (Indukcyjny dowód lematu Kuratowskiego-Zorna dla $X = \mathbb{N}$).

Założmy więc, że $\preceq$ jest relacją częściowego porządku w zbiorze $\mathbb{N}$, która spełnia założenia lematu Kuratowskiego-Zorna. Oprócz tego w $\mathbb{N}$ mamy też „zwykłą” relację dobrego porządku $\leq$. Dla uniknięcia nieporozumień, pojęcia związane z porządkami będziemy ponownie poprzedzać symbolami odpowiednich relacji.

Idea szukania elementu maksymalnego jest w tym przypadku bardzo prosta. Przeglądamy kolejno liczby naturalne, zgodnie z porządkiem $\leq$, poszukując elementu $\preceq$ -maksymalnego.

Definiujemy więc przez indukcję zero-jedynkowy ciąg $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ w następujący sposób.

Przyjmujemy $a_0 = 1$. Przypuśćmy następnie, że $n > 0$ i mamy już zdefiniowane wyrazy $a_0, \dots, a_{n-1}$. Jeśli $k \prec n$ dla wszystkich $k < n$, takich że $a_k = 1$, to przyjmujemy $a_n = 1$; w przeciwnym przypadku $a_n = 0$. Dokładniej:

$$(P) \quad a_0 = 1,$$

$$(R) \quad a_n = \varphi(\langle a_k : k < n \rangle),$$

gdzie funkcja

$$\varphi : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\},$$

o której mowa w twierdzeniu 4.15 o definiowaniu ciągów przez indukcję, określona jest wzorem

$$\varphi(\langle a_k : k < n \rangle) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } \forall k < n \ (a(k) = 1 \Rightarrow k \prec n), \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

To kończy indukcyjną definicję ciągu $\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle$.

Zatem przypisanie jedynki w n -tym kroku konstrukcji indukcyjnej następuje w przypadku, gdy liczba n jest $\preceq$ -większa od tych wszystkich liczb $\leq$ -mniejszych od n , którym wcześniej przypisaliśmy jedynkę. W tym momencie n staje się naszym kandydatem na poszukiwany element $\preceq$ -maksymalny zbioru $\mathbb{N}$. Okaze się, że jeden ($\preceq$ -największy) ze wskazanych tą drogą kandydatów rzeczywiście jest elementem $\preceq$ -maksymalnym.

Niech więc $L = \{n \in \mathbb{N} : a_n = 1\}$. Zauważmy, że zbiór L jest $\preceq$ -łańcuchem. Mianowicie, jeśli $k, n \in L$ i $k < n$, to $k \prec n$. Istotnie, skoro $a_k = a_n = 1$ oraz $k < n$, to musi być $k \prec n$, gdyż w przeciwnym wypadku, zgodnie z warunkiem (R) i definicją funkcji φ , byłoby $a_n = 0$.

Z założenia lematu Kuratowskiego-Zorna wynika zatem, że zbiór L jest $\preceq$ -ograniczony z góry – niech liczba n będzie jego dowolnym $\preceq$ -ograniczeniem górnym. Twierdzimy, że $n \in L$. Istotnie, jeśli $n = 0$, to $n \in L$. Jeśli zaś $n > 0$, to w szczególności $k \prec n$ dla każdego $k \in L$, takiego że $k < n$, gdyż n jest $\preceq$ -ograniczeniem górnym zbioru L . Ale wtedy, zgodnie z warunkiem (R), $a_n = 1$, czyli znów $n \in L$.

Pokazaliśmy więc, że dowolne $\preceq$ -ograniczenie górne łańcucha L jest jego elementem. Stąd i z lematu 13.2 wnioskujemy, że w zbiorze $\mathbb{N}$ istnieje element $\preceq$ -maksymalny. ■

Przykład 13.9 (Indukcyjny dowód lematu Kuratowskiego-Zorna).

Założmy teraz, że $\preceq$ jest relacją częściowego porządku w niepustym zbiorze X , która spełnia założenia lematu Kuratowskiego-Zorna. Z twierdzenia Zermelo wynika, że istnieje relacja $\leq$ dobrze porządkująca zbiór X . W zbiorze X mamy więc relację dobrego porządku $\leq$ oraz relację częściowego porządku $\preceq$; pojęcia związane z tymi z porządkami znów będziemy poprzedzać symbolami odpowiednich relacji.

Idea szukania elementu maksymalnego jest taka sama, jak w rozpatrywanym wcześniej przypadku, gdy $X = \mathbb{N}$. Dobry porządek $\leq$ spełnia tę rolę, którą poprzednio odgrywał zwykły dobry porządek w $\mathbb{N}$. Mianowicie, przeglądamy kolejno, zgodnie z porządkiem $\leq$, elementy zbioru X , poszukując elementu $\preceq$ -maksymalnego.

Dokładniej, niech x_0 będzie $\leq$ -najmniejszym elementem zbioru X . Definiujemy przez indukcję pozaskończoną ciąg pozaskończony $h : X \rightarrow \{0, 1\}$ typu $\langle X, \leq \rangle$ za pomocą następujących warunków:

$$\begin{cases} h(x_0) = 1, \\ h(x) = \varphi(h|_{O_{\leq}(x)}), \text{ dla } x > x_0, \end{cases}$$

gdzie funkcja

$$\varphi : \bigcup_{x \in X} \{0, 1\}^{O_{\leq}(x)} \rightarrow \{0, 1\},$$

o której mowa w twierdzeniu o definiowaniu przez indukcję pozaskończoną (zob. twierdzenia 12.11), jest określona wzorem

$$\varphi(h|_{O_{\leq}(x)}) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } \forall y < x \ (h(y) = 1 \Rightarrow y \prec x), \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Zatem w x -tym kroku konstrukcji indukcyjnej przypisujemy elementowi $x \in X$ jedynkę wtedy i tylko wtedy, gdy element x jest $\preceq$ -większy od tych wszystkich elementów $\leq$ -mniejszych od x , którym wcześniej przypisaliśmy jedynkę. W tym momencie element x staje się naszym kandydatem na poszukiwany element $\preceq$ -maksymalny zbioru X . Okaże się, że jeden ($\preceq$ -największy) ze wskazanych tą drogą kandydatów rzeczywiście jest elementem $\preceq$ -maksymalnym w X .

Niech więc $L = \{x \in X : h(x) = 1\}$. Zauważmy, że zbiór L jest $\preceq$ -łańcuchem w X . Mianowicie, jeśli $y, x \in L$ i $y < x$, to $y \prec x$. Istotnie, skoro $h(x) = h(y) = 1$ oraz $y < x$, to musi być $y \prec x$, gdyż w przeciwnym wypadku, zgodnie z definicją indukcyjną, byłoby $h(x) = 0$.

Z założenia lematu Kuratowskiego-Zorna wynika zatem, że zbiór L jest $\preceq$ -ograniczony z góry – niech element x będzie jego dowolnym $\preceq$ -ograniczeniem górnym.

Twierdzimy, że $x \in L$. Istotnie, jeśli $x = x_0$, to $x \in L$. Jeśli zaś $x > x_0$, to w szczególności $y \prec x$ dla każdego $y \in L$, takiego że $y < x$, gdyż x jest $\preceq$ -ograniczeniem górnym zbioru L . Ale wtedy $h(x) = 1$, czyli znów $x \in L$.

Pokazaliśmy więc, że dowolne $\preceq$ -ograniczenie górne łańcucha L jest jego elementem. Z lematu 13.2 wynika, że kończy to dowód. ■

Uwaga. Na koniec zauważmy, że powyższe rozumowanie ma ścisły związek z dowodem lematu Kuratowskiego-Zorna, przeprowadzonym przez nas wcześniej (por. dowód twierdzenia 13.1).

Zachowajmy oznaczenia ze sformułowania twierdzenia 13.1 i obu wariantów jego dowodu. Dobry porządek $\leq$ jest więc zgodny z pewną funkcją f , o której zakładamy, że każdemu $\preceq$ -łańcuchowi L w zbiorze X takiemu, że $b(L) \setminus L \neq \emptyset$, przyporządkowuje jego ograniczenie górne

$$f(L) = \min_{\leq}(b(L) \setminus L),$$

$\preceq$ -większe od wszystkich jego elementów (w szczególności, $f(\emptyset) = \min_{\leq} X = x_0$ jest elementem $\leq$ -najmniejszym zbioru X).

Nietrudno teraz zauważyć, że skonstruowany powyżej $\preceq$ -łańcuch $L = \{x \in X : h(x) = 1\}$ należy do rodziny $\mathcal{R}$. Istotnie, z konstrukcji wynika, że $\preceq | L = \leq | L$ oraz $x = f(\{y \in L : y < x\})$ dla każdego $x \in L$.

Jeśli ponadto $L \neq X$, to $L = O_{\leq}(a)$, gdzie $a = f(L)$. Równocześnie $a \notin L$, czyli $h(a) = 0$. Oznacza to, że istnieje element $y < a$ taki, że $y \not\prec a$.

Wynika stąd, że zbiór L jest największym, w sensie inkluzji, elementem rodziny $\mathcal{R}$. Istotnie, niech $A \in \mathcal{R}$ oraz $L \subseteq A$. Wtedy porządek $\preceq | A$ jest zgodny z funkcją f i z lematów 12.16 i 12.17 wnioskujemy, że zbiór A jest odcinkiem początkowym zbioru X w sensie porządku $\leq$ oraz $\preceq | A = \leq | A$. Gdyby więc $L \subsetneq A$, to $a = f(L) \in A$ i musiałyby zachodzić nierówność $y \prec a$, wbrew wyborowi elementu y . Tym samym pokazaliśmy więc, że $L = L_2$.