Dodatek F. Aksjomaty teorii mnogości.

Przedstawimy tu przyjmowany dziś powszechnie system aksjomatów E. Zermelo i A. A. Fraenkla. System ten i opartą na nim teorię zbiorów nazywa się teorią mnogości ZFC. Litery Z i F pochodzą od nazwisk twórców systemu, a C jest pierwszą literą angielskiego słowa *choice*, czyli wybór – wskazuje ona, że jednym z aksjomatów teorii ZFC jest właśnie pewnik wyboru (zob. wykład 4).

Aksjomaty dotyczą pewnego domyślnego *uniwersum zbiorów*, które starają się opisać. W konsekwencji, wszystkie obiekty tego uniwersum są zbiorami, a zatem każdy zbiór jest rodziną zbiorów – swoich elementów. Kwantyfikatory „dla każdego $x\ldots$" i „istnieje x takie, że...", należy więc teraz odczytywać tak: „dla każdego *zbioru* $x\ldots$" i, odpowiednio, „istnieje *zbiór* x taki, że...".

1. Aksjomat ekstensjonalności.

Jest to przedyskutowana dokładnie w wykładzie 1. zasada równości zbiorów: *Jeśli zbiory A i B mają te same elementy, to są identyczne.*

2. Aksjomat zbioru pustego.

Jest to aksjomat, który gwarantuje, że opisywane uniwersum zbiorów jest niepuste – należy do niego zbiór pusty:

Istnieje zbiór, który nie ma żadnego elementu.

3. Aksjomaty wyróżniania.

Właściwie mamy tu do czynienia ze *schematem aksjomatów wyróżniania.* Jest ich bowiem nieskończenie wiele, a każdy z nich jest związany z daną własnością W:

Dla każdego zbioru B, istnieje zbiór A, złożony z tych i tylko tych elementów x zbioru B, które mają własność W.

Jest to więc schemat definiowania zbiorów, przedyskutowany w wykładach 1 i 2. Wróćmy tu jednak raz jeszcze do istotnej kwestii, za pomocą jakich własności można definiować zbiory. Okazuje się, że wystarczy rozpatrywać wyłącznie następujące własności:

(1) własności podstawowe (nazywane czasem atomowymi), czyli własności postaci $x = y$ oraz $x \in y$,

(2) własności, utworzone z własności podstawowych za pomocą spójników logicznych i kwantyfikatorów.

Rozwijając aksjomatyczną teorię mnogości jako formalną teorię logiczną można w ogóle ograniczyć się do „wypowiedzi" powyższej postaci, które nazywa się *formułami* (języka pierwszego rzędu). Dokładniej, formuły są wyrażeniami zbudowanymi ze zmiennych, spójników logicznych, kwantyfikatorów i nawiasów zgodnie z następującymi regułami:

(1) Formułami są wyrażenia postaci $x = y$ i $x \in y$, gdzie x i y są dowolnymi zmiennymi.

(2) Jeśli W_1 i W_2 są formułami, to formułami są też wyrażenia $\neg(W_1)$, $(W_1 \wedge W_2)$, $(W_1 \vee W_2)$, $(W_1 \Rightarrow W_2)$, $(W_1 \Leftrightarrow W_2)$.

(3) Jeśli W jest formułą, a x jest dowolną zmienną, to formułami są też wyrażenia $\exists x\, W$ oraz $\forall x\, W$.

Formuły służą więc do wyrażania własności dwóch pojęć: zbioru oraz należenia do zbioru. Są to tak zwane pojęcia pierwotne teorii mnogości. W praktyce, wraz z rozwojem teorii wprowadzamy wiele nowych pojęć i z ich pomocą formułujemy coraz bardziej złożone własności. Dbamy jednak o to, żeby *dało się* je wyrazić za pomocą formuł. Przykładowo, własność $x \notin A$ można traktować jako skrót formuły $\neg(x \in A)$, własność $Z \subseteq X$ odpowiada formule

$$\forall x\, (x \in Z \Rightarrow x \in X), \tag{1}$$

a własność $A \cap B = \varnothing$ – formule

$$\neg(\exists x\, (x \in A \wedge x \in B)) \tag{2}$$

itp. W szczególności, wszystkie aksjomaty można zapisać w postaci odpowiednich formuł, co zostanie zrobione na końcu tego dodatku.

Przez zmienne występujące w formule rozumiemy wszystkie litery, które się w niej pojawiają. Zwróćmy uwagę, że zmienne mogą występować w różnych rolach. Zmienna x w formułach (1) i (2) w pewnym sensie wcale nie jest „zmienną", gdyż jest *związana* kwantyfikatorem. Natomiast rolę „prawdziwych" zmiennych odgrywają litery Z i X w formule (1) oraz litery A i B w formule (2). Są to *zmienne wolne* tych formuł. Zmienne te są wolne w podobnym sensie, w jakim „wolna" jest zmienna y w oznaczeniu całki nieoznaczonej $\int(x+y)dx$, podczas gdy zmienna x jest w nim „związana”. Natomiast w wyrażeniu $x + \int (x+y)dx$ zmienną x uznamy za „wolną” – analogicznie, zmienną wolną danej formuły jest każda zmienna, której *co najmniej jedno* wystąpienie w tej formule nie jest związane żadnym kwantyfikatorem. Na przykład, zmiennymi wolnymi formuły

$$x \in y \Rightarrow \exists x\ (x \in z),$$

są nie tylko zmienne y i z, ale również zmienna x (choć jedno z jej wystąpień jest związane kwantyfikatorem).

Odtąd więc *będziemy rozważać tylko takie własności, które da się wyrazić za pomocą formuł* (choć w praktyce rzadko będziemy je w tej postaci zapisywać). Wobec tego można powiedzieć, że schemat aksjomatów wyróżniania wiąże z każdą formułą W odpowiedni aksjomat, który używając symboliki logicznej można zapisać w następującej postaci:

$$\forall p_1 \ldots \forall p_n\ \forall B\ \exists A\ \forall x\ \big(x \in A \Leftrightarrow (x \in B \wedge W(x, B, p_1, \ldots, p_n))\big).$$

W formule W być może pewne zmienne są wolne, inne zaś mogą nie być wolne – zapis $W(x, B, p_1, \ldots, p_n)$ oznacza, że wszystkie zmienne wolne formuły W znajdują się wśród zmiennych $x, B, p_1, \ldots, p_n$. W szczególności zakładamy, że A nie jest zmienną wolną formuły W. Jest to istotne dla uniknięcia kłopotów natury logicznej. Intuicyjnie, nie możemy wyróżniać elementów, które mają utworzyć definiowany zbiór A, za pomocą własności odwołującej się do tego zbioru, zanim jeszcze został on zdefiniowany (zob. przykład F.1 punkt (3)). Zmienne $B, p_1, \ldots, p_n$ odgrywają rolę parametrów.

Przykład F.1.

(1) Niech $W(x, B, C)$ oznacza formułę $x \in C$. Wówczas odpowiadajacy tej formule aksjomat wyróżniania stwierdza, że

$$\forall C\ \forall B\ \exists A\ \forall x\ \big(x \in A\ \Leftrightarrow\ (x \in B \wedge x \in C)\big),$$

czyli innymi słowy: dla dowolnych zbiorów C i B istnieje zbiór

$$A = \{x \in B :\ x \in C\}.$$

Zdefiniowany zbiór A jest po prostu częścią wspólną zbiorów C i B. Inaczej mówiąc, iloczyn $C \cap B$ zdefiniowaliśmy, wyróżniając spośród wszystkich elementów zbioru B te, które należą jednocześnie do C – jego istnienie wynika więc z aksjomatu wyróżniania. Oczywiście, iloczyn $C \cap B$ można również zdefiniować, wyróżniając spośród wszystkich elementów zbioru C te, które należą jednocześnie do B, czyli określając

$$C \cap B = \{x \in C : x \in B\}.$$

(2) Przecięcie dowolnej niepustej rodziny zbiorów można również zdefiniować za pomocą aksjomatu wyróżniania (pamiętajmy, że teraz mówimy wyłącznie o zbiorach, zatem każdy zbiór jest rodziną zbiorów i terminów „zbiór" oraz „rodzina zbiorów" możemy używać zamiennie).
Mianowicie, niech $W(x, B, \mathcal{A})$ oznacza formułę

$$\forall A \ \big(A \in \mathcal{A} \ \Rightarrow \ x \in A\big).$$

Wówczas dla każdego $B \in \mathcal{A}$ mamy

$$\bigcap \mathcal{A} = \{x \in B : \ W(x, B, \mathcal{A})\}.$$

Inaczej mówiąc, iloczyn niepustej rodziny zbiorów $\mathcal{A}$ zdefiniowaliśmy, wyróżniając spośród wszystkich elementów dowolnego zbioru $B \in \mathcal{A}$ te, które należą do wszystkich zbiorów rodziny $\mathcal{A}$. Istnienie iloczynu niepustej rodziny zbiorów wynika więc z aksjomatu wyróżniania.

(3) Niech $W(x, C)$ oznacza formułę $\neg(x \in C)$. Odpowiadający tej formule aksjomat wyróżniania stwierdza, że

$$\forall C \ \forall B \ \exists A \ \forall x \ \big(x \in A \ \Leftrightarrow \ (x \in B \wedge x \notin C)\big),$$

czyli innymi słowy: dla dowolnych zbiorów C i B istnieje zbiór

$$A = \{x \in B : x \notin C\}.$$

Zbiór A jest po prostu różnicą zbiorów B i C. Inaczej mówiąc, różnicę $B \setminus C$ zdefiniowaliśmy, wyróżniając spośród wszystkich elementów zbioru B te, które nie należą do C.

Natomiast A jest zmienną wolną formuły $W(x, A)$, czyli formuły $\neg(x \in A)$ i błędem byłoby zastosowanie aksjomatu wyróżniania, odpowiadającego tej formule w następujący sposób:

$$\forall B \ \exists A \ \forall x \ \big(x \in A \ \Leftrightarrow \ (x \in B \wedge W(x, A))\big),$$

Mianowicie, jeśli zbiór B jest niepusty, to w wyniku powyższej „definicji" otrzymamy zbiór

$$A = \{x \in B : \ x \in B \wedge x \notin A\},$$

czyli zbiór

$$A = B \setminus A.$$

Jednakże, skoro $B \neq \varnothing$, to ostatnia równość nie zachodzi dla żadnego zbioru A – otrzymujemy więc sprzeczność. ■

4. Aksjomat pary.

Aksjomat ten gwarantuje istnienie pary nieuporządkowanej dowolnych zbiorów A i B:

Dla dowolnych zbiorów A i B istnieje zbiór C, którego elementami są dokładnie zbiory A oraz B.

Przypomnijmy, że w wykładzie 1 przyjęliśmy umowę, że będziemy stosować oznaczenia postaci $A = \{x : \ W(x)\}$ tylko w sytuacjach, w których *istnienie* zbioru A nie budzi wątpliwości, tzn., gdy bądź z kontekstu wynika, z jakiego zbioru B elementy tworzące zbiór A zostały wyróżnione za pomocą własności $W(x)$, bądź też istnienie zbioru A gwarantują inne aksjomaty teorii mnogości.

Zauważmy, że właśnie aksjomat pary zapewnia poprawność zapisu

$$\{A, B\} = \{x : x = A \vee x = B\}.$$

Nie możemy natomiast istnienia pary nieuporządkowanej uzasadnić używając aksjomatu wyróżniania; musielibyśmy a priori wiedzieć, do jakiego zbioru należą zbiory A i B, by móc następnie parę $\{A, B\}$ *wyróżnić* spośród jego elementów za pomocą formuły $x = A \vee x = B$. Takim zbiorem jest oczywiście właśnie para $\{A, B\}$, ale wiemy o tym dopiero *po* zagwarantowaniu jej istnienia za pomocą aksjomatu pary. Z powyższych uwag wynika jednak, że aksjomat pary można też sformułować w następujący sposób:

Dla dowolnych zbiorów A i B istnieje taki zbiór C, do którego należą zbiory A oraz B.

5. Aksjomat sumy.

Aksjomat ten gwarantuje istnienie sumy dowolnej rodziny zbiorów $\mathcal{A}$:

Dla dowolnej rodziny zbiorów $\mathcal{A}$ istnieje zbiór U, do którego należą dokładnie te zbiory x, które należą do co najmniej jednego spośród zbiorów, które są elementami rodziny $\mathcal{A}$.

Aksjomat ten uprawnia nas do zapisania definicji sumy rodziny zbiorów w postaci

$$\bigcup \mathcal{A} = \{x : \ \exists A \ (x \in A \wedge A \in \mathcal{A})\},$$

choć, z tych samych powodów, co w przypadku pary nieuporządkowanej, istnienia sumy nie możemy uzasadnić za pomocą aksjomatu wyróżniania.

Przykład F.2.

(1) Sumę zbiorów A i B można zdefiniować jako sumę rodziny zbiorów $\mathcal{A} = \{A,\ B\}$, której istnienie gwarantuje z kolei aksjomat pary:

$$A \cup B = \bigcup \{A, B\}.$$

(2) Różnicę symetryczną zbiorów A i B można zdefiniować za pomocą schematu wyróżniania, jako podzbiór sumy zbiorów A i B:

$$A \dot{-} B = \{x \in A \cup B : \ x \notin A \ \vee \ x \notin B\}. \quad \blacksquare$$

6. Aksjomat zbioru potęgowego.

Aksjomat ten zapewnia istnienie zbioru potęgowego dowolnego zbioru:

Dla każdego zbioru X istnieje zbiór P, którego elementami są dokładnie podzbiory zbioru X.

Znowu więc, po przyjęciu tego aksjomatu wolno nam napisać, że

$$\mathcal{P}(X) = \{Z : \ Z \subseteq X\}.$$

Przykład F.3. Iloczyn kartezjański zbiorów A i B można zdefiniować za pomocą aksjomatu wyróżniania. Trzeba najpierw zastanowić się, do jakiego zbioru należą pary uporządkowane $\langle x, y\rangle$, gdy x jest dowolnym elementem zbioru A, a y – dowolnym elementem zbioru B. Żeby odpowiedzieć na to pytanie, musimy zdecydować się na konkretną definicję pary uporządkowanej. Przyjmijmy więc tu, że

$$\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Ponieważ $x \in A$ i $y \in B$, więc oba elementy x i y należą do zbioru $A \cup B$. Stąd wynika, że

$$\{x\} \subseteq A \cup B \quad \text{oraz} \quad \{x, y\} \subseteq A \cup B.$$

Zatem

$$\{x\}, \{x, y\} \in \mathcal{P}(A \cup B).$$

To z kolei pociąga za sobą, że

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} \subseteq \mathcal{P}(A \cup B),$$

czyli

$$\langle x, y \rangle \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)).$$

Ostatecznie, definicja iloczynu kartezjańskiego zgodna z aksjomatem wyróżniania wygląda następująco:

$$A \times B = \{z \in \mathcal{P}\big(\mathcal{P}(A \cup B)\big) : \ \exists x \ \exists y \ (x \in A \wedge y \in B \wedge z = \langle x, y \rangle)\}. \quad \blacksquare$$

7. Aksjomat nieskończoności.

Zadaniem tego aksjomatu jest zagwarantowanie istnienia zbiorów nieskończonych, a w szczególności zbioru liczb naturalnych. Zbiór X nazywamy zbiorem **induktywnym**, jeśli spełnia następujące dwa warunki:

(1) $\varnothing \in X$,

(2) $\forall y \ (y \in X \ \Rightarrow \ y \cup \{y\} \in X)$.

Aksjomat nieskończoności stwierdza, że:

Istnieje zbiór induktywny.

Aksjomat ten rzeczywiście gwarantuje istnienie zbioru liczb naturalnych. Mianowicie, jeden ze sposobów wprowadzenia liczb naturalnych do matematyki polega na przyjęciu, że *zbiór liczb naturalnych* $\mathbb{N}$ *to najmniejszy zbiór induktywny*. Nietrudno udowodnić, że z istnienia jakiegokolwiek zbioru induktywnego X wynika, że istnieje najmniejszy taki zbiór: wystarczy zdefiniować $\mathbb{N}$ jako część wspólną rodziny wszystkich induktywnych podzbiorów zbioru X.

Nietrudno wówczas dowieść, że algebra $\langle \mathbb{N}, \varnothing, f \rangle$, gdzie $f(n) = n \cup \{n\}$ dla $n \in \mathbb{N}$, jest algebrą Peano (zob. wykład 12). Posługując się pozostałymi aksjomatami teorii ZFC można też pokazać, że aksjomat nieskończoności jest równoważny stwierdzeniu, że istnieje *jakakolwiek* algebra Peano.

8. Aksjomat wyboru.

Aksjomat ten umożliwia prowadzenie niekonstruktywnych dowodów istnienia różnych obiektów matematycznych – postuluje on istnienie funkcji, które nie zostały w żaden sposób zdefiniowane:

Dla dowolnej indeksowanej rodziny niepustych zbiorów $\langle A_i : i \in I\rangle$ istnieje funkcja wyboru, tzn. funkcja $f : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i$ taka, że

$$f(i) \in A_i \quad \textit{dla każdego} \quad i \in I.$$

Łatwo pokazać, że powyższe sformułowanie aksjomatu wyboru jest na gruncie pozostałych aksjomatów równoważne każdemu z następujących stwierdzeń (por. twierdzenie 4.3):

(1) dla dowolnej rodziny $\mathcal{A}$ złożonej z niepustych zbiorów istnieje funkcja wyboru tzn. funkcja $f : \mathcal{A} \longrightarrow \bigcup \mathcal{A}$ taka, że

$$f(A) \in A \quad \text{dla każdego} \quad A \in \mathcal{A},$$

(2) dla dowolnej rozłącznej rodziny $\mathcal{A}$ złożonej z niepustych zbiorów istnieje selektor, tzn. taki zbiór $S \subseteq \bigcup \mathcal{A}$, który z każdym ze zbiorów rodziny $\mathcal{A}$ ma dokładnie jeden element wspólny.

Niekonstruktywny charakter aksjomatu wyboru i dość nieoczekiwane wnioski z niego spowodowały, że przez wiele lat był on wśród matematyków przedmiotem kontrowersji, które jednak należą już w zasadzie do przeszłości. Te kontrowersje jednak spowodowały, że w oznaczeniu ZFC pojawiła się litera C – dla podkreślenia, że aksjomat wyboru jest jednym z aksjomatów teorii, na równi z innymi. Bez aksjomatu wyboru nie udałoby się udowodnić ani twierdzenia Zermelo, ani lematu Kuratowskigo-Zorna – każde z tych twierdzeń jest na gruncie pozostałych aksjomatów jemu równoważne. W toku wykładów korzystaliśmy z niego wielokrotnie – został on użyty nawet w dowodzie tego, że suma przeliczalnie wielu zbiorów przeliczalnych jest przeliczalna. Aksjomat wyboru jest narzędziem powszechnie stosowanym we współczesnej matematyce.

9. Aksjomaty zastępowania.

Te aksjomaty gwarantują istnienie zbiorów zdefiniowanych w sposób, który nie zawsze daje się uzasadnić za pomocą aksjomatów wyróżniania. Znów mamy tu do czynienia ze *schematem aksjomatów zastępowania* – odpowiedni aksjomat związany jest z daną formułą Φ:

Jeśli dla każdego x istnieje dokładnie jeden y, dla którego zachodzi $\Phi(x,y)$, to dla dowolnego zbioru X istnieje taki zbiór Y, że

$$\forall y\ \big(y \in Y \ \Leftrightarrow\ \exists x \in X\ (\Phi(x,y))\big).$$

Innymi słowy, mówiąc nieformalnie, jeśli formuła $\Phi(x,y)$ definiuje „globalną funkcję", czyli określa przyporządkowanie każdemu x takiego jedynego y, dla którego mamy $\Phi(x,y)$, to „obraz" dowolnego zbioru X względem tej „funkcji" też jest zbiorem.

Dokładniej, podobnie jak w przypadku aksjomatu wyróżniania, należałoby uwzględnić rolę różnych zmiennych występujących w formule Φ. Ponownie przyjmujemy, że zapis $\Phi(x,y,X,p_1,\ldots,p_n)$ oznacza, że wszystkie zmienne wolne formuły Φ znajdują się wśród zmiennych $x,y,X,p_1,\ldots,p_n$ (w szczególności zakładamy, że Y nie jest zmienną wolną formuły Φ). Ponadto niech kwantyfikator $\exists! y$ znaczy: „istnieje dokładnie jeden y taki, że...". Wówczas aksjomat zastępowania, odpowiadający formule Φ, przybiera następującą postać:

$$\begin{aligned}\forall p_1 \ldots \forall p_n \big(&\forall x\ \exists! y\ \Phi(x,y,X,p_1,\ldots,p_n)\\ &\Rightarrow\ \forall X\ \exists Y\ \forall y \big(y \in Y \ \Leftrightarrow\ \exists x\ (x \in X\ \wedge\ \Phi(x,y,X,p_1,\ldots,p_n))\big)\big).\end{aligned}$$

Podkreślmy, że istnienie następującego zbioru Y (dla większej przejrzystości parametry pomijamy):

$$Y = \{y :\ \exists x \in X\ (\Phi(x,y))\},$$

nie wynika z aksjomatu wyróżniania i poprawność powyższego zapisu zapewnia właśnie aksjomat zastępowania (zob. uwagę po sformułowaniu aksjomatu pary). Aby zastosować aksjomat wyróżniania, musielibyśmy *a priori* wiedzieć, że istnieje zbiór Z, do którego należą wszystkie elementy y o własności $\exists x \in X\ (\Phi(x,y))$, by móc następnie zbiór Y *wyróżnić* za pomocą tej własności spośród elementów zbioru Z.

Z powyższych uwag wynika jednak, że aksjomat zastępowania można też sformułować w następujący sposób:

$$\forall p_1 \dots \forall p_n \Bigg(\forall x\ \exists! y\ \Phi(x,y,X,p_1,\dots,p_n)$$
$$\Rightarrow\ \forall X\ \exists Z\ \forall x\ \Big(x \in X\ \Rightarrow \exists y\ (y \in Z \wedge \Phi(x,y,X,p_1,\dots,p_n))\Big)\Bigg).$$

Zauważmy również, że w powyższym zapisie formułę

$$\forall x\ \exists! y\ \Phi(x,y,X,p_1,\dots,p_n).$$

można zastąpić formułą

$$\forall x \in X\ \exists! y\ \Big(\Phi(x,y,X,p_1,\dots,p_n)\Big),$$

przenosząc jednocześnie kwantyfikator $\forall X$ na początek:

$$\forall X\ \forall p_1 \dots \forall p_n \Bigg(\forall x \in X\ \Big(\exists! y\ \Phi(x,y,X,p_1,\dots,p_n)\Big)$$
$$\Rightarrow\ \exists Z\ \forall x\ \Big(x \in X\ \Rightarrow \exists y\ (y \in Z \wedge \Phi(x,y,X,p_1,\dots,p_n))\Big)\Bigg).$$

Istotnie, jeśli mamy $\forall x\ \exists! y\ \Phi(x,y)$ to tym bardziej $\forall x \in X\ \exists! y\ \Phi(x,y)$. Na odwrót, jeśli mamy $\forall x \in X\ \exists! y\ \Phi(x,y)$, to dla formuły $\Phi'(x,y)$, określonej następująco:

$$(x \in X\ \Rightarrow\ \Phi(x,y)) \wedge (x \notin X\ \Rightarrow\ y = x),$$

mamy $\forall x\ \exists! y\ \Phi'(x,y)$; zastąpienie formuły $\Phi(x,y)$ formułą $\Phi'(x,y)$ nie wpływa na sens sformułowania aksjomatu.

Wynika stąd, że aksjomat zastępowania gwarantuje również, że jeśli formuła Φ pozwala każdemu elementowi x *danego zbioru* X jednoznacznie przyporządkować taki y, dla którego mamy $\Phi(x,y,X,p_1,\dots,p_n)$ (zmienne $p_1,\dots,p_n$ odgrywają rolę parametrów), to przyporządkowanie

$$x \mapsto \text{ jedyny } y \text{ taki, że } \Phi(x,y,X,p_1,\dots,p_n)$$

jest funkcją. Mianowicie, jeśli Z jest zbiorem takim, że dla każdego elementu $x \in X$ istnieje dokładnie jeden element $y \in Z$, dla którego mamy $\Phi(x,y,X,p_1,\dots,p_n)$

(istnienie takiego zbioru Z zapewnia właśnie aksjomat zastępowania), to tę funkcję można zdefiniować za pomocą aksjomatu wyróżniania w następujący sposób:

$$f = \{\langle x, y\rangle \in X \times Z : \ \Phi(x, y, X, p_1, \ldots, p_n)\}.$$

Aksjomat zastępowania pozwala więc zdefiniować funkcję f (i zarazem stwierdzić jej istnienie) podając „przepis" na jednoznaczne przyporządkowanie każdemu elementowi x zbioru X (argumentów funkcji) wartości y definiowanej funkcji *bez uprzedniego wskazania* zbioru, do którego wartości tej funkcji będą należeć.

Następujący przykład ujawnia rolę aksjomatu zastępowania w niektórych przeprowadzonych przez nas wcześniej rozumowaniach.

Przykład F.4.

(1) W twierdzeniu C.18 (punkt (1)) dowodziliśmy, że dla każdego zbioru T, złożonego z liczb porządkowych, istnieje liczba porządkowa większa od wszystkich liczb ze zbioru T. W dowodzie rozważaliśmy indeksowaną rodzinę zbiorów $\langle O(\alpha) : \ \alpha \in T\rangle$. Wiedzieliśmy jednak jedynie, że dla każdej liczby $\alpha \in T$ istnieje zbiór $O(\alpha)$ i a priori nie znaliśmy żadnego zbioru Y, do którego wszystkie zbiory $O(\alpha)$ należą. Istnienie rozpatrywanej indeksowanej rodziny zbiorów, czyli *funkcji* $\alpha \mapsto O(\alpha)$, wynika z aksjomatu zastępowania.

Oczywiście wskazany tu kłopot znika, jeśli przyjmiemy definicję von Neumanna, której konsekwencją jest równość $\alpha = O(\alpha)$ dla każdej liczby porządkowej α.

(2) W twierdzeniu C.18 (punkt (2)) dowodziliśmy, że dla każdego zbioru $\mathcal{A}$, złożonego ze zbiorów dobrze uporządkowanych, istnieje zbiór dobrze uporządkowany dłuższy od wszystkich elementów zbioru $\mathcal{A}$.

Na zbiorze $\mathcal{A}$ określiliśmy funkcję f wzorem:

$$f(\langle A, \leq_A\rangle) = \mathrm{typ}(A, \leq_A).$$

Znów jednak a priori nie wiemy, do jakiego zbioru należą wartości tej funkcji i uzasadnienie jej istnienia wymaga odwołania się do aksjomatu zastępowania.

(3) Kluczowy punkt dowodu twierdzenia C.11 polegał na pokazaniu, że jeśli A jest dowolnym zbiorem dobrze uporządkowanym przez relację $\leq_A\rangle$, to istnieje

dokładnie jedna liczba porządkowa α (w sensie definicji von Neumanna), która jest z nim izomorficzna.

Na zbiorze $\tilde{A}$, składającym się z tych elementów zbioru A, które wyznaczają odcinki początkowe izomorficzne z liczbami porządkowymi, określiliśmy funkcję f za pomocą warunku:

$$f(a) \text{ jest jedyną liczbą porządkową izomorficzną z odcinkiem } O(a).$$

Sytuacja jest taka sama, jak w poprzednim punkcie. ■

Inny sposób wykorzystania aksjomatów zastępowania pokazuje kolejny przykład.

Przykład F.5. Niech A będzie dowolnym zbiorem. W każdym z następujących przypadków dowód istnienia zbioru Y wymaga skorzystania z aksjomatu zastępowania.

(a) $Y = \{A,\ \{A\},\ \{\{A\}\},\ \{\{\{A\}\}\},\ldots\}$,

(b) $Y = \{A,\ \mathcal{P}(A),\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)),\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))),\ldots\}$.

W obu wypadkach należy zastosować ten aksjomat do zbioru $X = \mathbb{N}$, używając formuły $W(n,y)$ wyrażającej, mówiąc niezbyt ściśle, następującą własność: „$n \in \mathbb{N}$ i y jest wynikiem zastosowania n-krotnej iteracji pewnej „operacji” φ do zbioru A”. W punkcie (a) chodzi o „operację” $\varphi(x) = \{x\}$, w punkcie (b) – o „operację” $\varphi(x) = \mathcal{P}(x)$.

W każdym z przypadków mamy w rzeczywistości do czynienia z pewną formułą Φ, dla której zachodzi $\forall x \exists ! y\ \Phi(x,y)$; napis $y = \varphi(x)$ jest po prostu skrótem dla $\Phi(x,y)$. ■

W powyższym przykładzie narzucającym sie sposobem znalezienia odpowiedniej formuły $W(n,y)$ byłoby zdefiniowanie ciągu nieskończonego f za pomocą warunków indukcyjnych:

$$\begin{aligned} &(\mathrm{P}) \quad f(0) = a, \\ &(\mathrm{R}) \quad f(n+1) = \varphi\left(f(n)\right), \qquad \text{dla } n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

a następnie przyjęcie, że $W(n,y)$ wyraża własność $y = f(n)$. Co więcej, mając funkcję f moglibyśmy już bez konieczności korzystania z aksjomatu zastępowania każdorazowo stwierdzić po prostu, że $Y = R_f$.

Zwróćmy jednak uwagę, że powyższa definicja ciągu f wykracza poza zakres stosowalności twierdzeń o definiowaniu przez indukcję, poznanych w toku wykładów (por. wykłady 4, 11 i 12). Przykładowo, w twierdzeniu 4.6 warunek (R) odwołuje się do *funkcji* $\varphi : A \longrightarrow A$, gdzie A jest danym zbiorem, do którego należeć mają wyrazy definiowanego ciągu. W rozpatrywanej sytuacji a priori ani nie znamy zbioru A, ani warunek (R) nie odwołuje się do funkcji. Istnienie ciągu ciągu f wymaga więc uzasadnienia, które oparte jest właśnie na aksjomacie zastępowania. Ogólne twierdzenie, a właściwie schemat twierdzeń, dotyczących definicji indukcyjnych tego typu, ma następującą postać.

Niech $\Phi(x,y)$ będzie formułą (mogącą zawierać parametry, które jednak – dla większej przejrzystości – pomijamy). W założeniu twierdzenia wystąpi warunek $\forall x \exists! y\ \Phi(x,y)$, dzięki któremu, tak jak poprzednio, o formule $\Phi(x,y)$ będzie można myśleć jak o definicji pewnej „operacji". Pełni ona we wzorze indukcyjnym rolę „przepisu", który pozwala w „kroku" α zdefiniować wyraz x_α za pomocą zdefiniowanych „wcześniej" wyrazów ciągu o indeksach mniejszych od α. Zamiast $\Phi(x,y)$ będziemy pisać $y = \varphi(x)$; wyrazem początkowym definiowanego ciągu jest $\varphi(\emptyset)$, czyli jedyny x_0, dla którego mamy $\Phi(\emptyset, x_0)$.

Twierdzenie F.6. Jeśli zachodzi warunek:

$$\forall x \exists! y\ \Phi(x,y),$$

to dla dowolnej liczby porządkowej $\gamma > 0$ istnieje dokładnie jeden ciąg pozaskończony $\langle x_\alpha \rangle_{\alpha<\gamma}$ długości γ taki, że:

$$x_\alpha = \varphi\big((x_\beta)_{\beta<\alpha}\big) \quad \text{dla wszystkich } \alpha < \gamma.$$

Szkic dowodu. Rozumujemy tak jak w dowodzie twierdzenia D.3. Dla każdej liczby porządkowej $\xi \le \gamma$, ciągiem indukcyjnym długości ξ nazywamy ciąg pozaskończony f długości ξ spełniający warunek:

$$f(\alpha) = \varphi(f|O(\alpha)) \ \text{ dla } \alpha < \xi.$$

Następnie pokazujemy, że dla każdej liczby $\xi \le \gamma$ istnieje dokładnie jeden ciąg indukcyjny f_ξ długości ξ – ciąg f_γ jest ciągiem, którego szukamy.

Jedyna różnica polega na tym, że z chwilą, gdy pokażemy, że dla każdej liczby ξ istnieje *co najwyżej* jeden ciąg indukcyjny długości ξ, do uzasadnienia istnienia indeksowanej rodziny ciągów indukcyjnych $\langle f_\xi : \xi \in Z \rangle$, o zbiorze indeksów

$$Z = \{\xi \le \gamma : \text{ istnieje ciąg indukcyjny długości } \xi\},$$

musimy wykorzystać aksjomat zastępowania. W dowodzie twierdzenia D.3 wystarczył w tym miejscu aksjomat wyróżniania, gdyż znając zbiór A, do którego należą wyrazy definiowanego ciągu, potrafimy też wskazać zbiór, do którego należą wszystkie funkcje f_ξ dla $\xi \in Z$ – zbiorem tym jest $\bigcup_{\alpha<\gamma} A^{O(\alpha)}$. ■

Podamy jeszcze jedno zastosowanie powyższego twierdzenia. **Domknięciem przechodnim** zbioru X nazywamy najmniejszy (w sensie inkluzji) zbiór przechodni, w którym zbiór X jest zawarty.

Twierdzenie F.7. Dla każdego zbioru X istnieje jego domknięcie przechodnie.

Dowód. Definiujemy ciąg $\langle X_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ za pomocą następujących warunków indukcyjnych:

$$X_0 = X,$$
$$X_{n+1} = \bigcup X_n, \qquad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

Ściślej, niech $\Phi(x,y)$ będzie formułą wyrażającą następującą własność:

$$(x = \varnothing \;\Rightarrow\; y = X) \wedge (x \neq \varnothing \;\Rightarrow\; y = \bigcup x).$$

Wówczas istnienie ciągu $\langle X_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ wynika z twierdzenia F.6 (dla formuły $\Phi(x,y)$).

Niech $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Twierdzimy, że T jest domknięciem przechodnim zbioru X.

Oczywiście, $X \subseteq T$. Ponadto, zbiór T jest przechodni. Istotnie, jeśli $x \in T$ oraz $z \in x$, to $x \in X_n$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ i wówczas $z \in X_{n+1}$, skąd $z \in T$.

Załóżmy więc, że Z jest dowolnym zbiorem przechodnim takim, że $X \subseteq Z$; pokażemy, że $T \subseteq Z$. W tym celu udowodnimy przez indukcję, że $X_n \subseteq Z$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Ponieważ $X_0 = X$, więc $X_0 \subseteq Z$. Niech $n \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że $X_n \subseteq Z$; chcemy pokazać, że $X_{n+1} \subseteq Z$. Weźmy $x \in X_{n+1}$. Skoro $X_{n+1} = \bigcup X_n$, to $x \in z$ dla pewnego $z \in X_n$. Ale $X_n \subseteq Z$, więc $z \in Z$ i z przechodniości zbioru Z wynika, że $x \in Z$.

Pokazaliśmy, że zbiór T jest najmniejszym zbiorem przechodnim, zawierającym zbiór X. ■

Aksjomaty 1– 9 używane były w toku wykładów wielokrotnie i współczesna matematyka nie może się bez nich obyć (dotyczy to zwłaszcza aksjomatów 1 – 8). Na koniec sformułujemy aksjomat, który poza teorią mnogości nie ma istotnego znaczenia.

10. Aksjomat regularności (ufundowania).

Aksjomat ten wyklucza pewne obiekty z opisywanego przez aksjomaty uniwersum zbiorów, narzucając na zbiory następujący warunek:

Każdy niepusty zbiór X ma element rozłączny z X.

Z tego aksjomatu skorzystaliśmy w wykładzie 1., przyjmując, że nie istnieje żaden zbiór A taki, że $A \in A$. Istotnie, w przeciwnym razie w zbiorze $X = \{A\}$ nie byłoby elementu rozłącznego z X; jedynym elementem zbioru X jest zbiór A, ale $A \in A \cap X$. Podobnie, nie istnieją takie zbiory A, B, że $A \in B \in A$, ani zbiory A, B, C, dla których $A \in B \in C \in A$ itd.

Twierdzenie F.8. Nie istnieje ciąg zbiorów $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że

$$\forall n \in \mathbb{N}\ (x_{n+1} \in x_n).$$

Dowód. Przypuśćmy, że $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem o powyższej własności i niech $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Wówczas dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$x_{n+1} \in X \cap x_n,$$

więc zbiór X nie jest rozłączny z żadnym swoim elementem. Jest to sprzeczne z aksjomatem ufundowania. ■

Nazwa „aksjomat ufundowania" ma następujace uzasadnienie. Relację r nazywamy **relacją ufundowaną w zbiorze** X, jeśli w każdym niepustym podzbiorze $Y \subseteq X$ istnieje taki element $y \in Y$, z którym żaden element $x \in Y$ nie jest w relacji r. Innymi słowy, mamy $\neg(x\ r\ y)$ dla każdego $x \in Y$.

Zauważmy na przykład, że relacja liniowego porządku $\leq$ zbioru X dobrze porządkuje ten zbiór wtedy i tylko wtedy, gdy relacja $<$ jest ufundowana w zbiorze X.

Aksjomat ufundowania jest równoważny stwierdzeniu, że „relacja należenia" jest ufundowana w każdym zbiorze, ściślej: dla każdego zbioru X, relacja

$$\in|X = \{\langle x, y\rangle \in X \times X : \ x \in y\}$$

jest ufundowana w X.

Rola aksjomatu regularności w teorii mnogości polega również na tym, że pozwala on na lepsze sprecyzowanie, jaka jest struktura uniwersum zbiorów, które aksjomaty starają się opisać. Mianowicie, posługując się twierdzeniem F.6, można każdej liczbie porządkowej α przyporządkować zbiór R_α w taki sposób, by spełnione były następujące warunki indukcyjne:

$$\begin{aligned}
R_0 &= \varnothing,\\
R_{\alpha+1} &= \mathcal{P}(R_\alpha),\\
R_\alpha &= \bigcup\{R_\beta : \ \beta < \alpha\}, \text{ o ile liczba } \alpha \text{ jest graniczna.}
\end{aligned}$$

Powiemy, że zbiór X ma własność $\mathbf{R}$, jeśli istnieje liczba porządkowa α taka, że $X \in R_\alpha$. Naszym celem jest udowodnienie, że każdy zbiór ma własność $\mathbf{R}$.

Lemat F.9. Każdy zbiór R_α jest przechodni.

Dowód. Przypuśćmy, że jest przeciwnie i niech α będzie najmniejszą liczbą porządkową, dla której zbiór R_α nie jest przechodni.

Rozważmy dwa przypadki.

Przypadek 1. Liczba α jest następnikiem porządkowym.

Wówczas $\alpha = \gamma + 1$ dla pewnej liczby γ oraz $R_\alpha = \mathcal{P}(R_\gamma)$. Niech $x \in R_\alpha$ i $z \in x$. Wtedy $x \subseteq R_\gamma$, więc $z \in R_\gamma$. Ale $\gamma < \alpha$, więc zbiór R_γ jest przechodni, a stąd $z \subseteq R_\gamma$, czyli $z \in R_\alpha$.

Okazało się, że zbiór R_α jest przechodni, co przeczy wyborowi α.

Przypadek 2. Liczba α jest graniczna.

Wtedy

$$R_\alpha = \bigcup_{\gamma<\alpha} R_\gamma.$$

Niech $x \in R_\alpha$ i $z \in x$. Wtedy $x \in R_\gamma$ dla pewnej liczby $\gamma < \alpha$. Ale $\gamma < \alpha$, więc zbiór R_γ jest przechodni. Stąd wynika, że $z \in R_\gamma$, a więc tym bardziej $z \in R_\alpha$.

Okazało się, że zbiór R_α jest przechodni, co ponownie przeczy wyborowi α.
■

Uwaga. Rozumując tak jak w dowodzie lematu F.9 można wykazać ogólnie, że jeśli zbiór X jest przechodni, to zbiór $\mathcal{P}(X)$ też jest przechodni. Podobnie, można pokazać, że jeśli zbiory A_i są przechodnie dla $i \in I$, to zbiór $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ też jest przechodni.

Lemat F.10. Dla dowolnych liczb porządkowych α, β

$$\beta \leq \alpha \quad \Rightarrow \quad R_\beta \subseteq R_\alpha.$$

Dowód. Przypuśćmy, że jest przeciwnie i niech α będzie najmniejszą liczbą porządkową, dla której istnieje liczba $\beta < \alpha$ spełniająca warunek $R_\beta \not\subseteq R_\alpha$; ustalmy taką liczbę β.

Znów rozważmy dwa przypadki.

Przypadek 1. Liczba α jest następnikiem porządkowym.

Wówczas $\beta \leq \gamma < \gamma + 1 = \alpha$ dla pewnej liczby γ. Ponieważ $\gamma < \alpha$ i $\beta \leq \gamma$, to $R_\beta \subseteq R_\gamma$. Jeśli więc $x \in R_\beta$, to $x \in R_\gamma$. Z lematu F.9 wynika zatem, że $x \subseteq R_\gamma$, czyli $x \in R_{\gamma+1} = R_\alpha$. To dowodzi, że $R_\beta \subseteq R_\alpha$, wbrew wyborowi α.

Przypadek 2. Liczba α jest graniczna.

Wtedy

$$R_\alpha = \bigcup_{\gamma<\alpha} R_\gamma,$$

więc w szczególności $R_\beta \subseteq R_\alpha$, co znowu przeczy wyborowi α.

W obu przypadkach otrzymaliśmy sprzeczność. ■

Lemat F.11. Jeśli każdy element zbioru X ma własność **R**, to X ma własność **R**.

Dowód. Niech f będzie funkcją daną wzorem

$$f(z) = \min\{\alpha : z \in R_\alpha\} \quad \text{dla} \quad z \in X.$$

Istnienie takiej funkcji f wynika z aksjomatu zastępowania.

Niech teraz $\beta = \sup R_f$. Wówczas z lematu F.10 wynika, że

$$z \in R_\beta \quad \text{dla każdego} \quad z \in X,$$

czyli $X \subseteq R_\beta$, a stąd $X \in R_{\beta+1}$. To dowodzi, że zbiór X ma własność **R**. ■

Możemy teraz udowodnić zapowiedziane (przed lematem F.9) twierdzenie.

Twierdzenie F.12. Każdy zbiór ma własność **R**.

Dowód. Przypuśćmy, że wbrew tezie twierdzenia, istnieje zbiór Y, który nie ma własności **R**. Niech T będzie domknięciem przechodnim zbioru Y; jego istnienie gwarantuje twierdzenie F.7. Zauważmy, że zbiór T również nie ma własności **R**. Istotnie, w przeciwnym razie $T \in R_\alpha$ dla pewnej liczby porządkowej α i wówczas $T \subseteq R_\alpha$ na mocy lematu F.9, a stąd $Y \subseteq R_\alpha$, czyli $Y \in R_{\alpha+1}$, co przeczy wyborowi zbioru Y.

Określmy zbiór X wzorem

$$X = \{x \in T: \ x \text{ nie ma własności } \mathbf{R}\}.$$

Z lematu F.11 wynika, że $X \neq \varnothing$, więc korzystając z aksjomatu regularności wybierzmy taki zbiór $Z \in X$, że $Z \cap X = \varnothing$. Zauważmy, że $Z \in T$, więc przechodniość zbioru T zapewnia, że $Z \subseteq T$.

Weźmy dowolny element $x \in Z$. Wówczas $x \notin X$, ale jednocześnie $x \in T$, więc x ma własność **R**. Z lematu F.11 wynika zatem, że również Z ma własność **R** i otrzymujemy sprzeczność. ■

Konsekwencją aksjomatu regularności jest więc to, że teoria mnogości ZFC formalnie ogranicza się do badania zbiorów mających własność **R**. Hierarchia zbiorów postaci R_α nadaje uniwersum złożonemu z takich zbiorów strukturę, którą wyobraża poniższy rysunek.

Rysunek F.1.

Może się wydawać zaskakujące, że redukujemy nasze rozważania wyłącznie do zbiorów otrzymanych ze zbioru pustego w wyniku „pozaskończonej iteracji” operacji tworzenia zbioru potęgowego. Podkreślmy więc raz jeszcze, że z jednej strony ograniczenie to ma znaczenie dla samej teorii mnogości, z drugiej jednak – nie wpływa istotnie na kształt pozostałej matematyki. Po pierwsze bowiem, jak już niejednokrotnie zaznaczaliśmy, sam sposób zdefiniowania takich pojęć, jak na przykład liczby naturalne czy rzeczywiste, nie ma wielkiego znaczenia dla zajmowania się samą matematyką. Po drugie, jeśli zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ zdefiniujemy jako najmniejszy zbiór induktywny (zob. aksjomat nieskończoności), a następnie za pomocą tego zbioru skonstruujemy pozostałe zbiory liczbowe: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ oraz $\mathbb{R}$ (zob. wykład 11), to można łatwo pokazać, *nie* odwołując się do aksjomatu regularności, że wszystkie te zbiory mają własność **R**. Również i inne podstawowe obiekty matematyczne można bez ograniczenia ogólności definiować jako pewne zbiory o własności **R**.

Wspomnijmy w tym miejscu, że przyjęte przez teorię ZFC rozstrzygnięcie co do tego, jakie obiekty tworzą badane uniwersum, nie jest jedynym możliwym. Znane są inne ujęcia teorii mnogości, które dopuszczają istnienie obiektów, które nie są zbiorami. W szczególności obiektami tymi mogą być **atomy** oraz **klasy**.

Atomy nie mają w ogóle elementów, choć są różne od zbioru pustego. W teorii mnogości z atomami przyjmuje się często odpowiednik aksjomatu regularności mówiący, że wszystkie zbiory można otrzymać ze zbioru pustego i atomów w wyniku „pozaskończonej iteracji” operacji tworzenia zbioru potęgowego.

Klasy mają elementy i przyjmuje się, że każdy zbiór jest klasą. W teorii mnogości z klasami dopuszcza się jednak istnienie klas, które są w pewnym sensie „za duże” na to, by być zbiorami. Ich przykładami są: klasa wszystkich zbiorów, klasa wszystkich liczb porządkowych i klasa wszystkich liczb kardynalnych.

Przedstawmy na koniec listę wszystkich aksjomatów ZFC, zapisanych za pomocą odpowiednich formuł. Dwukrotnie użyjemy skrótu postaci $\exists! y W(y)$ na oznaczenie formuły wyrażającej własność „istnieje dokładnie jeden taki y, że zachodzi $W(y)$”. Formuła taka ma postać:

$$\exists y\ W(y)\ \wedge\ \forall x \forall z\ \Big((W(x) \wedge W(z)) \Rightarrow x = z\Big).$$

(1) **Aksjomat ekstensjonalności.**

$$\forall A\, \forall B\ \Big(\forall x\ (x \in A\ \Leftrightarrow\ x \in B) \Rightarrow A = B\Big).$$

(2) **Aksjomat zbioru pustego.**

$$\exists X\ \forall y\ \neg(y \in X).$$

(3) **Aksjomaty wyróżniania.**

$$\forall p_1 \ldots \forall p_n\ \forall B\ \exists A\ \forall x\ \Big(x \in A\ \Leftrightarrow\ (x \in B \wedge W(x, B, p_1, \ldots, p_n))\Big).$$

(4) **Aksjomat pary.**

$$\forall A\ \forall B\ \exists C\ \forall x\ \Big(x \in C \Leftrightarrow (x = A \vee x = B)\Big).$$

(5) **Aksjomat sumy.**

$$\forall \mathcal{A}\ \exists U\ \forall x\ \Big(x \in U\ \Leftrightarrow\ \exists A\ (x \in A \wedge A \in \mathcal{A})\Big).$$

(6) **Aksjomat zbioru potęgowego.**

$$\forall X\ \exists P\ \forall Z\ \Big(Z \in P\ \Leftrightarrow\ \forall x\ (x \in Z\ \Rightarrow\ x \in X)\Big).$$

(7) **Aksjomat nieskończoności.**

$$\exists X\ \Bigg(\exists Y\ \Big(Y \in X \wedge \forall y\ \neg(y \in Y)\Big)$$
$$\wedge\ \forall y\ \Big(y \in X\ \Rightarrow\ \exists z\ \Big(z \in X \wedge \forall x\ (x \in z\ \Leftrightarrow\ (x \in y \vee x = y))\Big)\Big)\Bigg).$$

(8) **Aksjomat wyboru.**

$$\forall \mathcal{A}\ \Bigg(\Big(\forall A\ (A \in \mathcal{A}\ \Rightarrow\ A \neq \varnothing)$$
$$\wedge\ \forall A\ \forall B\ ((A \in \mathcal{A} \wedge B \in \mathcal{A} \wedge A \neq B)\ \Rightarrow\ \neg(\exists x\ (x \in A \wedge x \in B))\Big)$$
$$\Rightarrow\ \exists S\ \forall A\ \Big(A \in \mathcal{A}\ \Rightarrow \exists! y\ (y \in S \wedge y \in A)\Big)\Bigg).$$

(9) **Aksjomaty zastępowania.**

$$\forall p_1 \ldots \forall p_n \Big(\forall x \; \exists! y \; \Phi(x, y, X, p_1, \ldots, p_n)$$

$$\Rightarrow \; \forall X \; \exists Y \; \forall y \Big(y \in Y \; \Leftrightarrow \; \exists x \; (x \in X \; \wedge \; \Phi(x, y, X, p_1, \ldots, p_n)) \Big) \Big).$$

(10) **Aksjomat regularności (ufundowania).**

$$\forall X \; \Big(X \neq \varnothing \; \Rightarrow \; \exists y \; \Big(y \in X \wedge \neg(\exists z \, (z \in X \wedge z \in y)) \Big) \Big).$$