Egzamin poprawkowy z logiki matematycznej
23 lutego 2021

Zadanie 1. Udowodnij sekwent

$$\exists x\, \neg R(f(x)) \longrightarrow \forall x\, \exists y\, (R(y) \Rightarrow S(x))$$

w rachunku sekwentów. (R, S są jednoargumentowymi symbolami relacyjnymi, a f jednoargumentowym symbolem funkcyjnym.)

Zadanie 2. Udowodnij, że jeśli zbiór $S \subseteq \mathbb{Q}$ jest definiowalny (być może z parametrami) w strukturze $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ i jest nieskończony, to S zawiera pewien niepusty przedział otwarty w $\mathbb{Q}$ (tj. istnieją takie $q, r \in \mathbb{Q}$, $q < r$, dla których $\mathbb{Q} \cap (q, r) \subseteq S$).

Zadanie 3. Niech $\mathcal{K}$ będzie klasą wszystkich nieskończonych liniowych porządków (jako struktur sygnatury z jednym dwuargumentowym symbolem relacyjnym $\preccurlyeq$).

(a) Udowodnij, że klasa $\mathcal{K}$ jest aksjomatyzowalna.
(b) Rozstrzygnij, czy klasa $\mathcal{K}$ jest skończenie aksjomatyzowalna.

Zadanie 4. Niech $\mathbb{A} = (\mathbb{Q}, \cdot^{\mathbb{A}}, I^{\mathbb{A}})$, gdzie $\cdot^{\mathbb{A}}$ to zwykłe mnożenie w $\mathbb{Q}$, a I jest symbolem relacyjnym jednoargumentowym i $I^{\mathbb{A}} = (0, 1) \cap \mathbb{Q}$.

Udowodnij, że istnieje zanurzenie elementarne h struktury $\mathbb{A}$ w pewną strukturę $\mathbb{B} = (B, \cdot^{\mathbb{B}}, I^{\mathbb{B}})$ taką, że $|B| = |\mathbb{R}|$, a ponadto zbiór definiowalny w $\mathbb{B}$ formułą

$$\psi(x) := \exists y\, (I(y) \wedge x = y \cdot y)$$

też jest równoliczny z $\mathbb{R}$.

Zadanie 5. Udowodnij, że nie istnieje zdanie ξ sygnatury z jednym dwuargumentowym symbolem relacyjnym $\preccurlyeq$ takie, że dla dowolnej skończonej struktury $\mathbb{A} = (A, \preccurlyeq^{\mathbb{A}})$, $\mathbb{A} \models \xi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{A}$ jest częściowym porządkiem, w którym istnieje antyłańcuch (tj. zbiór elementów wzajemnie nieporównywalnych) mocy co najmniej $|A|/3$.

Zadanie 6. Udowodnij, że istnieje liczba $k \in \mathbb{N}$ taka, że dla dowolnego liniowego porządku $\mathbb{A} = (A, \leqslant^{\mathbb{A}})$, jeśli $\mathbb{A} \equiv_k (\mathbb{N}, \leqslant)$ i $\mathbb{A} \not\simeq (\mathbb{N}, \leqslant)$, to w $\mathbb{A}$ istnieje nieskończony ciąg ściśle malejący $a_0 >^{\mathbb{A}} a_1 >^{\mathbb{A}} a_2 \ldots$.

Znajdź najmniejszą taką liczbę k.

Rachunek sekwentów

Sekwenty są postaci $\Gamma \longrightarrow \Delta$, gdzie Γ, Δ to skończone ciągi formuł. Intuicyjny sens sekwentu $\Gamma \longrightarrow \Delta$ to "koniunkcja wszystkich formuł z Γ pociąga za sobą alternatywę wszystkich formuł z Δ.

Aksjomat

$$\frac{}{\varphi \longrightarrow \varphi}\ \text{(aksjomat)}$$

Reguły strukturalne

$$\frac{\Gamma_1, \varphi, \psi, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta}{\Gamma_1, \psi, \varphi, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta}\ \text{(wymiana:L)} \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta_1, \varphi, \psi, \Delta_2}{\Gamma \longrightarrow \Delta_1, \psi, \varphi, \Delta_2}\ \text{(wymiana:R)}$$

$$\frac{\Gamma, \varphi, \varphi \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \longrightarrow \Delta}\ \text{(ściąganie:L)} \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi}\ \text{(ściąganie:R)}$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \longrightarrow \Delta}\ \text{(osłabianie:L)} \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi}\ \text{(osłabianie:R)}$$

Reguły wprowadzania spójników

$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \longrightarrow \Delta}\ (\wedge\text{:L}) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi \qquad \Gamma \longrightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}\ (\wedge\text{:R})$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \longrightarrow \Delta \qquad \Gamma, \psi \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \longrightarrow \Delta}\ (\vee\text{:L}) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}\ (\vee\text{:R})$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma, \neg\varphi \longrightarrow \Delta}\ (\neg\text{:L}) \qquad \frac{\Gamma, \varphi \longrightarrow \Delta}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \neg\varphi}\ (\neg\text{:R})$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi \qquad \Gamma, \psi \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \Rightarrow \psi \longrightarrow \Delta}\ (\Rightarrow\text{:L}) \qquad \frac{\Gamma, \varphi \longrightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi \Rightarrow \psi}\ (\Rightarrow\text{:R})$$

Reguła cięcia

$$\frac{\Gamma, \varphi \longrightarrow \Delta \qquad \Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma \longrightarrow \Delta}\ \text{(cięcie)}$$

Reguły wprowadzania kwantyfikatorów

$$\frac{\Gamma, \varphi(t/x) \ \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x\, \varphi \ \longrightarrow \Delta}\ (\forall{:}\mathrm{L}) \qquad \frac{\Gamma \ \longrightarrow \Delta, \varphi(y/x)}{\Gamma \ \longrightarrow \Delta, \forall x\, \varphi}\ (\forall{:}\mathrm{R})$$

$$\frac{\Gamma, \varphi(y/x) \ \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x\, \varphi \ \longrightarrow \Delta}\ (\exists{:}\mathrm{L}) \qquad \frac{\Gamma \ \longrightarrow \Delta, \varphi(t/x)}{\Gamma \ \longrightarrow \Delta, \exists x\, \varphi}\ (\exists{:}\mathrm{R})$$

(warunek: w regułach ($\forall$:R) i ($\exists$:L) zmienna y nie występuje w $\Gamma \cup \Delta \cup \{\varphi\}$)

Aksjomaty równości (w logice pierwszego rzędu z =)

$$\frac{}{\longrightarrow t = t}\ (\mathrm{AE1})$$

$$\frac{}{t = s \ \longrightarrow s = t}\ (\mathrm{AE2})$$

$$\frac{}{t = s, s = u \ \longrightarrow t = u}\ (\mathrm{AE3})$$

$$\frac{}{t_1 = s_1, \ldots t_n = s_n, R(\bar{t}) \ \longrightarrow R(\bar{s})}\ (\mathrm{AE4})$$

$$\frac{}{t_1 = s_1, \ldots t_n = s_n \ \longrightarrow f(\bar{t}) = f(\bar{s})}\ (\mathrm{AE5})$$