Egzamin z logiki matematycznej
3 lutego 2021

Zadanie 1. Udowodnij sekwent

$$[\forall x(R(x) \Rightarrow \exists y S(y)) \wedge \exists x R(x)] \longrightarrow \exists y S(y)$$

w rachunku sekwentów. Symbole R, S są tu jednoargumentowymi symbolami relacyjnymi.

Zadanie 2. Rozstrzygnij, czy:

(a) istnieje zdanie języka z jedną dwuargumentową relacją $\leqslant$ prawdziwe w pewnym nieskończonym częściowym porządku, ale fałszywe w każdym skończonym częściowym porządku,
(b) istnieje zdanie języka z jedną dwuargumentową relacją $\equiv$ prawdziwe w pewnej nieskończonej relacji równoważności, ale fałszywe w każdej skończonej relacji równoważności.

Zadanie 3. Niech $\mathbb{A} = (A, \equiv^{\mathbb{A}})$ będzie przeliczalną relacją równoważności mającą dokładnie dwie klasy abstrakcji. Udowodnij równoważność następujących warunków:

(a) istnieje zbiór $S \subseteq A$ definiowalny (potencjalnie z parametrami) w $\mathbb{A}$ i taki, że zarówno S, jak i $A \setminus S$ są nieskończone,
(b) obie klasy abstrakcji $\equiv^{\mathbb{A}}$ są nieskończone.

Zadanie 4. Niech $\mathbb{A} = (\mathbb{N}, \leqslant^{\mathbb{N}}, S^{\mathbb{N}})$, gdzie $\leqslant^{\mathbb{N}}$ to zwykły porządek na $\mathbb{N}$, a $S^{\mathbb{N}}$ to zbiór kwadratów liczb naturalnych. Niech $\mathbb{B}$ oznacza pewną ultrapotęgę postaci $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$, gdzie $\mathcal{U}$ jest ultrafiltrem niegłównym na $\mathbb{N}$.

(a) Udowodnij, że istnieją elementy $b_1, b_2 \in S^{\mathbb{B}}$, dla których zbiór $\{x \in B : b_1 <^{\mathbb{B}} x <^{\mathbb{B}} b_2\}$ jest nieskończony i rozłączny z $S^{\mathbb{B}}$.
(b) $^{(*?)}$ Udowodnij, że dla dowolnych elementów $b_1, b_2 \in B$ jak powyżej, podstruktury $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2$ struktury $\mathbb{B}$ o uniwersach odpowiednio $B_1 = \{x \in B : b_1 \leqslant^{\mathbb{B}} x\}$ i $B_2 = \{x \in B : b_2 \leqslant^{\mathbb{B}} x\}$ są elementarnie równoważne.

Zadanie 5. Niech T będzie teorią w skończonej sygnaturze zawierającej między innymi symbol relacyjny jednoargumentowy U. Załóżmy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje model $\mathbb{A} \models T$ taki, że $|A| \geqslant n, |U^{\mathbb{A}}| = \lfloor n/3 \rfloor$. Udowodnij, że istnieje struktura $\mathbb{B} \models T$ taka, że $|U^{\mathbb{B}}| = |B \setminus U^{\mathbb{B}}| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$.

Zadanie 6. Niech T będzie teorią w sygnaturze z dwuargumentowym symbolem relacyjnym $\preccurlyeq$ i przeliczalnie wieloma stałymi $c_0, c_1, c_2, \ldots$ mającą następujące aksjomaty:

— $\preccurlyeq$ jest gęstym liniowym porządkiem bez końców,
— $c_n \preccurlyeq c_{n+1} \wedge c_n \neq c_{n+1}$ (dla każdego $n \in \mathbb{N}$).

Rozstrzygnij:

(a) ile jest przeliczalnych modeli T, z dokładnością do izomorfizmu,
(b) czy teoria T jest zupełna.

Rachunek sekwentów

Sekwenty są postaci $\Gamma \longrightarrow \Delta$, gdzie Γ, Δ to skończone ciągi formuł. Intuicyjny sens sekwentu $\Gamma \longrightarrow \Delta$ to "koniunkcja wszystkich formuł z Γ pociąga za sobą alternatywę wszystkich formuł z Δ.

Aksjomat

$$\frac{}{\varphi \longrightarrow \varphi}\ (\text{aksjomat})$$

Reguły strukturalne

$$\frac{\Gamma_1, \varphi, \psi, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta}{\Gamma_1, \psi, \varphi, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta}\ (\text{wymiana:L}) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta_1, \varphi, \psi, \Delta_2}{\Gamma \longrightarrow \Delta_1, \psi, \varphi, \Delta_2}\ (\text{wymiana:R})$$

$$\frac{\Gamma, \varphi, \varphi \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \longrightarrow \Delta}\ (\text{ściąganie:L}) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi}\ (\text{ściąganie:R})$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \longrightarrow \Delta}\ (\text{osłabianie:L}) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi}\ (\text{osłabianie:R})$$

Reguły wprowadzania spójników

$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \longrightarrow \Delta}\ (\wedge\text{:L}) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi \qquad \Gamma \longrightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}\ (\wedge\text{:R})$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \longrightarrow \Delta \qquad \Gamma, \psi \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \longrightarrow \Delta}\ (\vee\text{:L}) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}\ (\vee\text{:R})$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma, \neg\varphi \longrightarrow \Delta}\ (\neg\text{:L}) \qquad \frac{\Gamma, \varphi \longrightarrow \Delta}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \neg\varphi}\ (\neg\text{:R})$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi \qquad \Gamma, \psi \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \Rightarrow \psi \longrightarrow \Delta}\ (\Rightarrow\text{:L}) \qquad \frac{\Gamma, \varphi \longrightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi \Rightarrow \psi}\ (\Rightarrow\text{:R})$$

Reguła cięcia

$$\frac{\Gamma, \varphi \longrightarrow \Delta \qquad \Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma \longrightarrow \Delta}\ (\text{cięcie})$$

Reguły wprowadzania kwantyfikatorów

$$\frac{\Gamma, \varphi(t/x) \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x\, \varphi \longrightarrow \Delta}\ (\forall{:}\mathrm{L}) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi(y/x)}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \forall x\, \varphi}\ (\forall{:}\mathrm{R})$$

$$\frac{\Gamma, \varphi(y/x) \longrightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x\, \varphi \longrightarrow \Delta}\ (\exists{:}\mathrm{L}) \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, \varphi(t/x)}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \exists x\, \varphi}\ (\exists{:}\mathrm{R})$$

(warunek: w regułach (∀:R) i (∃:L) zmienna y nie występuje w $\Gamma \cup \Delta \cup \{\varphi\}$)

Aksjomaty równości (w logice pierwszego rzędu z =)

$$\frac{}{\longrightarrow t = t}\ (\mathrm{AE1})$$

$$\frac{}{t = s \longrightarrow s = t}\ (\mathrm{AE2})$$

$$\frac{}{t = s, s = u \longrightarrow t = u}\ (\mathrm{AE3})$$

$$\frac{}{t_1 = s_1, \ldots t_n = s_n, R(\bar{t}) \longrightarrow R(\bar{s})}\ (\mathrm{AE4})$$

$$\frac{}{t_1 = s_1, \ldots t_n = s_n \longrightarrow f(\bar{t}) = f(\bar{s})}\ (\mathrm{AE5})$$