

Granica ciągu II

Stw. 1. Niech $k \in \mathbb{N}$, ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$. Jeżeli $2 \mid k$ i $a_n \geq 0$ dla każdego n , lub $2 \nmid k$ to ciąg $(\sqrt[k]{a_n})_n$ jest zbieżny i $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{g}$.

Definicja. Niech $(a_n)_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem i $(n_k)_{k=1}^\infty$ będzie rosnącym ciągiem liczb naturalnych. Wówczas mówimy, że ciąg $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$ jest *podciągiem* ciągu $(a_n)_n$.

1. Suma postępu geometrycznego. Niech $a \in \mathbb{R}$ i $0 < |q| < 1$. Wykaż, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n aq^k = \frac{a}{q-1}.$$

2. Wykaż, że ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny do g wtw. gdy każdy jego podciąg jest zbieżny do g .

3. Ciąg $(a_n)_n$ ma dwa podciągi $(a_{k_n})_n$ i $(a_{l_n})_n$ takie, że dla pewnych stałych c, d $a_{k_n} < c < d < a_{l_n}$ dla każdego n . Wykaż, że ciąg $(a_n)_n$ jest rozbieżny.

4. Wykaż, że ciąg $(\sin n)_n$ nie ma granicy.

5. Wykaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i $a > 1$ prawdziwa jest nierówność $\sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a-1}{n}$. Następnie udowodnij, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

6. Wykaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ prawdziwa jest nierówność $\sqrt[n]{n} \leq 1 + \sqrt{\frac{2}{n}}$. Następnie udowodnij, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

7. Oblicz granice ciągów lub wykaż, że ciągi są rozbieżne:

- (a) $\sqrt[n]{3^n + 2^n}$
 (b) $\sqrt[n]{10^{-2026} \cdot 3^n + 2^n}$,
 (c) $\sqrt[n]{3^n - 10^{2026} \cdot 2^n}$,
 (d) $\sqrt[n]{n + 3^n}$,

- (e) $\sqrt[n]{2n + \frac{(-1)^n}{n}}$,
 (f) $\sqrt[n^2]{n}$,

8. (a) Załóżmy, że $a_n \in \mathbb{R}$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$. Wykaż, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

(b) Załóżmy, że $a_n \geq 0$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$. Wykaż, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

9. Oblicz granicę ciągów

- (a) $\frac{2^n}{n!}$, (b) $\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

10. Liczby całkowite a_n, b_n spełniają zależność $a_n + b_n\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^n$. Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$.

11. Niech $k \in \mathbb{N}$, ciąg $(a_n)_{n=1}^\infty$ ma wyrazy ze zbioru $\{1, 2, \dots, k\}$ i

$$b_n = \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Wykaż, że jeśli nieskończenie wiele wyrazów ciągu $(b_n)_n$ jest liczbami całkowitymi, to wszystkie wyrazy tego ciągu są całkowite.

ZADANIA DODATKOWE

12. Niech $0 < |q| < 1, s \in \mathbb{N}$. Wykaż, że ciąg $s_n = \sum_{k=1}^n k^s q^k$ jest zbieżny. Wyznacz jego granicę dla $s = 1, 2$.

13. Niech $(f_n)_n$ to ciąg Fibonacciego. Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$.

14. Oblicz granice ciągów lub wykaż, że ciągi są rozbieżne:

- (a) $\sqrt[n]{5^n + 4^n + 3^n + 2^n}$ (d) $\sqrt[n+2]{n-2}, n \geq 2$,
 (b) $\sqrt[n]{10^n - 50 \cdot 3^n + n^{2026}}$ (e) $\sqrt[n^2]{5^n - 4}$,
 (c) $\sqrt[n]{|\sin n| + |\cos n|}$ (f) $\sqrt[n]{5^{n-1} - 7 \cdot 2^{2n} - 100}$

15. Wyznacz granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!}$.

16. Liczby całkowite a_n, b_n spełniają zależność $a_n + b_n\sqrt{5} = (2 + \sqrt{5})^n$. Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$.