

Granica ciągu I

Definicja granicy ciągu. Liczba g jest granicą ciągu liczbowego $(a_n)_n$, jeżeli dla każdej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna N taka, że dla wszystkich $n > N$ spełniona jest nierówność

$$|a_n - g| < \varepsilon.$$

Piszemy wówczas $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$, $a_n \xrightarrow{n} g$ lub po prostu $a_n \rightarrow g$.

Jeżeli liczba $g \in \mathbb{R}$ jest granicą ciągu $(a_n)_n$, to mówimy, że ciąg $(a_n)_n$ *jest zbieżny do g*. Ciąg, który nie jest zbieżny, nazywamy *ciągami rozbieżnym*.

Stw. 1 (jednoznaczność granicy). Ciąg liczbowy (a_n) ma nie więcej niż jedną granicę.

Stw. 2. Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, to

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = ca \text{ dla dowolnego } c \in \mathbb{R}, \quad (ii) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b.$$

Stw. 3. Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.

Tw. 4. (o trzech ciągach) Dane są trzy ciągi liczbowe $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ i $(c_n)_n$, przy czym $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g$ oraz istnieje liczba $N > 0$ taka, że dla każdego $n > N$ spełniona jest nierówność $a_n \leq b_n \leq c_n$. Wówczas ciąg $(b_n)_n$ jest zbieżny i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$.

Stw. 5. Ciągi $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ są zbieżne i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Wówczas

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab,$$

$$(ii) \text{ jeśli } b \neq 0, \text{ to } b_n \neq 0 \text{ dla dostatecznie dużych } n \text{ i } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

$$1. \text{ Wykaż, korzystając z definicji granicy ciągu, że (a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{n^2 - 1} = 2,$$

$$(b) \text{ jeśli } |q| < 1, k \in \mathbb{N}, \text{ to } \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \text{ i } \lim_{n \rightarrow \infty} n^k q^n = 0.$$

$$2. \text{ Zbadaj zbieżność ciągu } a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

$$3. \text{ Wykaż, że } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - g| = 0.$$

$$4. \text{ Załóżmy, że } a_n \rightarrow a. \text{ Wykaż, że } |a_n| \rightarrow |a|. \text{ Podaj przykład, że nie zachodzi implikacja w drugą stronę.}$$

$$5. \text{ Wykaż, że poniższe ciągi są rozbieżne:}$$

$$(a) a_n = n,$$

$$(b) b_n = (-1)^n + \frac{1}{n},$$

$$(c) c_n = \frac{q^n}{n^k}, \text{ gdzie } |q| > 1, k \in \mathbb{N},$$

$$(d) a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k},$$

$$(e) b_n = \frac{n^n}{n!}.$$

$$6. \text{ Ciąg } (a_n)_n \text{ jest zbieżny i } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n > a. \text{ Wykaż, że istnieje } N \in \mathbb{N} \text{ takie, że } a_n > a \text{ dla } n > N.$$

$$7. \text{ Ciągi } (a_n)_n \text{ i } (b_n)_n \text{ są zbieżne i } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n > \lim_{n \rightarrow \infty} b_n. \text{ Wykaż, że istnieje } N \in \mathbb{N} \text{ takie, że } a_n > b_n \text{ dla } n > N.$$

$$8. \text{ Ciągi } (a_n)_n \text{ i } (b_n)_n \text{ są zbieżne i istnieje } N \in \mathbb{N} \text{ takie, że } a_n \leq b_n \text{ dla } n > N. \text{ Wykaż, że}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Podaj przykład ciągów $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ takich, że $a_n < b_n$ dla wszystkich n oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

$$9. \text{ Ciąg } (a_n)_n \text{ jest ograniczony, a ciąg } (b_n)_n \text{ jest zbieżny do } 0. \text{ Wykaż, że } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0.$$

$$10. \text{ Ciąg } (a_n)_n \text{ jest zbieżny. Wykaż, że } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0.$$

$$11. \text{ Oblicz granice ciągów lub wykaż, że ciągi są rozbieżne:}$$

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n - 2}{2n + 8},$$

$$(f) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 2n} \right),$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n - 3)^2}{3n^2 + 7n - 6},$$

$$(g) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} \binom{n+k}{n}, k \in \mathbb{N},$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 3^{n+1} - 2 \cdot 2^{2n}}{5 \cdot 3^n - 4^{n+2}},$$

$$(h) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + \sqrt{n}} - \sqrt{n^2 - \sqrt{n}}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}},$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2^n - 7 \cdot 3^n}{3^n + 2},$$

$$(i) \sin(\sqrt{n+1}) - \sin(\sqrt{n-1}),$$

$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 7^n + n^7 5^n}{n^7 7^n + n^5 5^n},$$

$$(j) \frac{n}{n^2 + 1} \sin(n!).$$

ZADANIA DODATKOWE

$$12. \text{ Korzystając z definicji granicy ciągu wykaż, że (a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0, (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

$$13. \text{ Wykaż rozbieżność ciągów: (a) } a_n = \sqrt{n} - \sqrt[3]{n}, (b) b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}},$$

$$(c) c_n = (-1)^n + 2^{-n}.$$

$$14. \text{ Oblicz granice ciągów lub wykaż, że ciągi są rozbieżne:}$$

$$(a) \frac{3n^4 - 10n^3 - 2n^2 + 7}{9n^4 - 5n^2 + 19n}$$

$$(d) \frac{5^{n+1} \cdot n^2 - 3^{n+2} \cdot n^3}{3n \cdot 5^{n+2} + 2^{n+3} \cdot n^6},$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)}{n^2},$$

$$(e) \frac{2\sqrt{n} - 3\sqrt[3]{n+1}}{3\sqrt{n+1} - 2\sqrt[3]{n}},$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! + (n-1)!}{(n+1)! - (n-1)!},$$

$$(f) n^3 \left(\sqrt{n^2 + \sqrt{n^4 + 1}} - n\sqrt{2} \right),$$

$$15. \text{ Załóżmy, że } a_n \rightarrow g. \text{ Wykaż, że ciąg } b_n = \frac{\lfloor na_n \rfloor}{n} \text{ też jest zbieżny do } g.$$