

Fukcje wymierne

Definicja. Funkcję postaci $F(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, gdzie p, q są wielomianami zmiennej rzeczywistej lub zespolonej, $q \neq 0$, nazywamy *funkcją wymierną*. Domyślną dziedziną funkcji f jest zbiór wszystkich argumentów x takich, że $g(x) \neq 0$.

Definicja. Funkcję wymierną postaci $H(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $ad \neq bc$ nazywamy *homografią*.

Rozwiązywanie nierówności wymiernych. Nierówności postaci $F(x) > G(x)$ lub $F(x) \geq G(x)$, gdzie F i G są funkcjami wymiernymi, najlepiej rozwiązywać poprzez sprowadzenie do nierówności $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ lub $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$, gdzie f i g to wielomiany, i skorzystanie z równoważności

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \iff f(x)g(x) > 0 \quad \text{lub} \quad \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \iff f(x)g(x) \geq 0 \text{ i } g(x) \neq 0.$$

1. Wyznacz dziedzinę i zbiór wartości funkcji F . Naszkicuj wykres i wyznacz funkcję odwrotną, jeżeli $F(x) = \frac{x+3}{5x-2}$.

2. Niech $F(x) = \frac{x^2-1}{x+2}$, $G(x) = \frac{x+1}{2(x^2-4)}$. Wyznacz dziedzinę i zbiór wartości funkcji $f(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$.

3. Rozwiąż równania.

$$(a) \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{x^2-2}{x^2+x}$$

$$(b) \frac{2}{x+2} - \frac{x^2}{x+1} = 1$$

4. Rozwiąż nierówności

$$(a) \frac{x}{1+x} \leq x$$

$$(c) \frac{x^2+9x+14}{x^2-1} < \frac{2}{x-1}$$

$$(b) \frac{x-1}{4x+5} \geq \frac{x-3}{4x-3}$$

$$(d) \frac{x}{x-1} \leq \frac{3x+4}{x^2+2x-3}$$

5. Rozwiąż nierówności

$$(a) \left| \frac{2x-3}{x^2-1} \right| < 2$$

$$(b) \frac{3}{|x+3|-1} \geq |x+2|$$

6. Wykaż, że złożenie dwóch homografii też jest homografią.

7. Niech f będzie homografią (na $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$). Wykaż, że

(a) f jest funkcją różnowartościową,

(b) funkcja f^{-1} (określona na obrazie f) też jest homografią,

8. Niech $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ oznacza zbiór liczb zespolonych z dołączonym punktem w nieskończoności. Wówczas każdą homografię $H(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, $ad \neq bc$, można rozszerzyć do bijekcji na $\overline{\mathbb{C}}$ kładąc $f(-d/c) = \infty$ i $f(\infty) = a/c$ (lub $f(\infty) = \infty$ gdy $c = 0$). Wykaż, że jako funkcje na $\overline{\mathbb{C}}$ homografie przekształcają proste i okręgi na proste i okręgi. (W $\overline{\mathbb{C}}$ prosta to „okrąg” przechodzący przez ∞).

ZADANIA DODATKOWE

9. Rozwiąż równania.

$$(a) \frac{4}{x-2} - \frac{5}{x+2} = \frac{20}{x^2-4}$$

$$(c) 9 \cdot \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = 7 \cdot \frac{x+1}{x-1}$$

$$(b) \frac{9x^2-5x}{3x-2} = 2 + \frac{x}{3x-2}$$

$$(d) \frac{5x^2-32x+3}{x^2-4x+3} = 2 - \frac{9-3x}{x-1}$$

10. Rozwiąż nierówności

$$(a) \frac{x^2-9}{x^2+3x} > 0$$

$$(e) \frac{x^2+6x-3}{x^2+1} \leq 2$$

$$(b) \frac{x}{x^2-5x+6} \geq \frac{1}{x-2}$$

$$(f) \frac{9x^2-5x}{3x-2} \leq 2 + \frac{x}{3x-2}$$

$$(c) \frac{1+x^3}{x^2-4} < x$$

$$(g) \left| \frac{2x-2}{x-4} \right| > 4$$

$$(d) \frac{x-1}{x} - \frac{x+1}{x-1} < 2$$

$$(h) \frac{1}{x^3-x} \leq \frac{1}{|x|}$$

11. Wyznacz w zależności od parametru a zbiór wartości funkcji $f(x) = \frac{x+a}{x^2+ax+1}$.

12. Wyznacz wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ równanie

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x.$$

13. Liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają warunki $ac \neq bd$ i $(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) < 0$. Udowodnij, że funkcja

$$f(x) = \frac{(ax+b)(cx+d)}{(bx+a)(dx+c)}$$

przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste.

14. Udowodnij, że dla liczby naturalnej $n \geq 2$ i liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_n$ takich, że $0 \leq x_j \leq \frac{1}{2}$ dla $j = 1, 2, \dots, n$ zachodzi nierówność

$$\frac{x_1 x_2 \dots x_n}{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^n} \leq \frac{(1-x_1)(1-x_2) \dots (1-x_n)}{((1-x_1) + (1-x_2) + \dots + (1-x_n))^n}.$$