

Wielomiany IV

Mówimy, że liczba x_0 jest k -krotnym pierwiastkiem wielomianu $P(x)$ stopnia n , jeżeli istnieje wielomian $Q(x)$ stopnia $n - k$ taki, że $P(x) = (x - x_0)^k Q(x)$ i $Q(x_0) \neq 0$.

Zasadnicze twierdzenie algebry. Każdy wielomian o współczynnikach zespolonych dodatniego stopnia ma pierwiastek zespolony.

Wniosek 1. Każdy wielomian $p \in \mathbb{C}[z]$, $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ stopnia $n > 1$, ma dokładnie n pierwiastków zespolonych $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ (niekoniecznie różnych) i $p(z) = a_n(z - z_0)(z - z_1) \dots (z - z_{n-1})$.

Wniosek 2. Każdy wielomian z $\mathbb{R}[x]$ dodatniego stopnia jest iloczynem wielomianów z $\mathbb{R}[x]$ stopnia 1 i wielomianów z $\mathbb{R}[x]$ stopnia 2 nie mających pierwiastków rzeczywistych.

Wniosek 3. Każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych nieparzystego stopnia ma pierwiastek rzeczywisty.

Twierdzenie (Wzory Viete'a). Liczby $x_1, x_2, \dots, x_n$ są wszystkimi zespolonymi pierwiastkami wielomianu $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, gdzie $a_i \in \mathbb{C}$ i $a_n \neq 0$, wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są równości

$$\sum_{i=1}^n x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}, \quad \dots, \\ \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}, \quad \dots, \quad x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Uwaga: W powyższym twierdzeniu nie zakładamy, że pierwiastki $x_1, x_2, \dots, x_n$ są różne.

Niech $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, gdzie $a_n \neq 0$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych.

I twierdzenie o pierwiastkach wymiernych. Jeżeli liczba wymierna $\frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in \mathbb{Z}$ są względnie pierwsze, jest pierwiastkiem wielomianu f , to $p \mid a_0$ oraz $q \mid a_n$.

Wniosek. Każdy wymierny pierwiastek unormowanego wielomianu o współczynnikach całkowitych jest liczbą całkowitą.

II twierdzenie o pierwiastkach wymiernych. Jeżeli liczba wymierna $\frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in \mathbb{Z}$ są względnie pierwsze, jest pierwiastkiem wielomianu f i b jest liczbą całkowitą taką, że $f(b) \neq 0$, to $p - bq \mid f(b)$.

- Liczby x_1, x_2, x_3 są pierwiastkami wielomianu $x^3 + 6x^2 + 11x - 6$. Znajdź wielomian stopnia 3, którego pierwiastkami są liczby (a) $x_1 x_2, x_2 x_3, x_3 x_1$, (b) $x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1$

- Znajdź pierwiastki wielomianu $x^4 - 10x^3 + 32x^2 - 34x + a$, wiedząc, że suma pewnych dwóch jego pierwiastków jest równa 4.
- Wielomian $w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) ma trzy pierwiastki rzeczywiste. Udowodnij, że $b^2 \geq ac$ i $c^2 \geq bd$. Czy jest prawdziwe twierdzenie odwrotne?
- Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają nierówności $a + b + c > 0$, $ab + bc + ca > 0$ i $abc > 0$. Udowodnij, że $a > 0$, $b > 0$ i $c > 0$.
- Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 20 \end{cases}$$

- Liczby $u_1, u_2, \dots, u_n$ to zespolone pierwiastki z 1 stopnia $n + 1$ różne od 1. Oblicz sumę $\sum_{k=1}^n (1 - u_k)^{-1}$.
- Wyznacz wszystkie pierwiastki wymierne wielomianów:
(a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ (b) $x^4 + 4x^3 - 25x^2 - 16x + 84$.
- Udowodnij, że liczby $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ i $\sqrt[3]{3} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ są niewymierne, korzystając z tw. o pierwiastkach wymiernych wielomianów.
- Niech $k, p \in \mathbb{N}$ i wielomian $f(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ma współczynniki całkowite. Udowodnij, że jeżeli $p + 1$ nie dzieli żadnej z liczb $f(k), f(k + 1), \dots, f(k + p)$, to wielomian f nie posiada pierwiastków wymiernych.

ZADANIA DODATKOWE

- Wielomian $w(x) = x^3 + px + q$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2, x_3 , przy czym $x_1 = x_2$ i $x_3 = x_1 - 6$. Wyznacz p i q .
- Niech $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Oblicz sumę, sumę kwadratów i iloczyn pierwiastków wielomianu $x^n - (x - 1)^n$.
- Liczby x, y, z, u, v, w spełniają warunki
 $x + y + z = u + v + w, \quad xyz = uvw, \quad 0 < u \leq x \leq y \leq z \leq w, \quad u \leq v \leq w$.
Udowodnij, że $u = x, v = y, w = z$.
- Wielomian $ax^3 + bx^2 + cx + d$ współczynniki całkowite i trzy pierwiastki rzeczywiste. Liczba ad jest nieparzysta, a liczba bc jest parzysta. Udowodnij, że pewien pierwiastek tego wielomianu jest liczbą niewymierną.
- Wszystkie współczynniki wielomianu $P(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + 1$ są liczbami nieujemnymi i wielomian P ma n pierwiastków rzeczywistych. Udowodnij, że $P(2) \geq 3^n$.
- Wyznacz wszystkie pierwiastki wymierne wielomianów:
(a) $11x^4 + 9x^3 - 35x^2 - 27x + 6$, (b) $15x^4 - 19x^3 + 16x^2 - x - 3$,