

Wielomiany III

Schemat Hornera. Dany jest wielomian $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ($a_n \neq 0$) i liczba c . Współczynniki wielomianu $g(x) = b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$ takiego, że $f(x) = (x - c)g(x) + f(c)$ i liczbę $f(c)$ można sprawnie wyznaczyć za pomocą algorytmu zwanego *schematem Hornera*:

	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_1	a_0
c	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + cb_{n-1}$	$\dots$	$b_0 = a_1 + cb_1$	$f(c) = a_0 + cb_0$

Tw. (O interpolacji wielomianowej) Niech $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ i $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$, $y_0, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{C}$. Wówczas istnieje dokładnie jeden wielomian p stopnia nie większego od n taki, że $p(x_j) = y_j$ dla $j = 0, 1, \dots, n$.

Wniosek. (Drugie tw. o równości wielomianów) Jeżeli wielomiany p, q stopnia nie większego niż n przyjmują te same wartości dla $n + 1$ różnych argumentów, to $p = q$.

- Stosując schemat Hornera oblicz iloraz i resztę z dzielenia wielomianu
 - $3x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 1$ przez $x - 1$,
 - $4x^5 + 3x^3 - 2x + 1$ przez $x + 2$,
- Stosując schemat Hornera zapisz wielomian $x^5 + 2x^3 + 3x$ jako sumę potęg dwumianu $x - 1$.
- Dla jakich wartości $a, b \in \mathbb{R}$ wielomian $ax^4 + bx^3 + 1$ jest podzielny przez $(x - 1)^2$?
- Wyznacz wszystkie wartości parametrów $a, b \in \mathbb{C}$ takie, że wielomian $p(x) = x^4 - ax^2 + bx - 2$ jest podzielny przez $q(x) = (x + 1)(x - a)$. Dla każdej znalezionej pary a, b wyznacz iloraz wielomianów $p(x)$ i $q(x)$.
- Udowodnij, że nie istnieje wielomian p taki, że $p(x) = \sin x$ dla każdego $x \in [0, \pi]$.

ZADANIA DODATKOWE

- Stosując schemat Hornera oblicz iloraz i resztę z dzielenia wielomianu
 - $\frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{2}{3}x - 2$ przez $x + \frac{1}{3}$,
 - $3x^4 + x^2 - 4x + 7i$ przez dwumian $1 - i$
- Stosując schemat Hornera zapisz wielomian $3x^6 - x^5 + 5x^4 - 2x^3 + 3x + 5$ jako sumę potęg dwumianu $x + 2$.
- Wykonaj dzielenie wielomianu z resztą:
 - $x^3 + 3x^2 - 2x - 1$ przez $x^2 + 2x$,

(b) $x^6 + 1$ przez $x^2 + x - 2$

(c) $3x^7 - x^6 + 2x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 4x - 2$ przez $x^2 + 1$

(d) x^8 przez $x^4 - x^3 - x^2 - x + 1$

- Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że wielomian $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$ jest podzielny przez $(x - 1)^2$.
- Czy istnieje wielomian $p \in \mathbb{R}[x]$ taki, że $p(x) = \sqrt[3]{x}$ dla każdego $x \in [-1, 1]$?