
Liczby zespolone – zadania dodatkowe

1. Niech $z, w \in \mathbb{C}$. Udowodnij tożsamości

$$|1 + z\bar{w}|^2 + |z - w|^2 = (1 + |z|^2)(1 + |w|^2).$$

2. Dana jest liczba zespolona z taka, że $\operatorname{Re}(z) > 1$. Udowodnij, że

$$\left| \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}.$$

3. Rozwiąż w liczbach zespolonych równania

(a) $z^2 + 2i\bar{z}^2 = 3 + 3i$,

(d) $z^2 + 2|z|^2 = 2$,

(b) $iz^2 + (1 + 2i)z + 1 = 0$,

(c) $z^4 + 6(1 + i)z^2 + 5 + 6i = 0$,

(e) $(z - i)^4 = (\bar{z} + 2i)^4$.

4. Wyznacz w postaci algebraicznej pierwiastki zespolone:

(a) stopnia 4 z liczby $\sqrt{3} + i$

(c) stopnia 3 z liczby $18 + 26i$

(b) stopnia 3 z liczby $2 + 2i$

(d) stopnia 4 z liczby $-7 + 24i$

5. Oblicz część rzeczywistą i urojoną liczb:

(a) $\left(\frac{-\sqrt{3} - i}{-i + 1} \right)^{200}$

(b) $\left(\frac{9 - 9i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{3}i} \right)^{300}$

6. Rozstrzygnij, czy istnieją liczby całkowite dodatnie n takie, że

$$\operatorname{Im} \left(\left(\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{1 - i\sqrt{3}} \right)^n \right) = 0.$$

Jeśli odpowiedź jest twierdząca, wyznacz najmniejsze takie n .

7. Liczby zespolone a, b, c spełniają warunki

$$a + b + c \neq 0 \quad \text{i} \quad |a| = |b| = |c| > 0.$$

Udowodnij, że

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{1}{a + b + c} \right) \geq 0.$$

8. Liczby $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ to wszystkie zespolone pierwiastki stopnia $n > 2$ z 1 uporządkowane według rosnących wartości ich argumentów głównych. Wyznacz wartość sum

(a) $u_0\bar{u}_1 + u_1\bar{u}_2 + u_2\bar{u}_3 + \dots + u_{n-2}\bar{u}_{n-1} + u_{n-1}\bar{u}_0$,

(b) $u_0^2\bar{u}_1 + u_1^2\bar{u}_2 + u_2^2\bar{u}_3 + \dots + u_{n-2}^2\bar{u}_{n-1} + u_{n-1}^2\bar{u}_0$