

## Wielomiany II

**Tw. 1. (o dzieleniu wielomianów)** Dla każdej pary wielomianów  $f(x)$  i  $h(x)$ , gdzie  $\deg h \geq 0$ , istnieje dokładnie jedna para wielomianów  $q(x)$  i  $r(x)$  taka, że

$$f = h \cdot q + r, \quad \text{ i } \quad \deg r < \deg h.$$

Mówimy wówczas, że  $r$  jest *resztą z dzielenia* wielomianu  $f$  przez wielomian  $h$ . Jeżeli  $r = 0$  (czyli  $f = h \cdot q$ ), to mówimy, że  $h$  jest *dzielnikiem*  $f$  lub  $f$  jest *podzielny* przez  $h$ .

**Tw. 2. (Bézouta)** Reszta z dzielenia wielomianu  $f$  przez dwumian  $x - c$  jest równa  $f(c)$ , czyli  $f(x) = (x - c)q(x) + f(c)$  dla pewnego wielomianu  $q$  takiego, że  $\deg q = \deg f - 1$ .

**Wniosek.** Jeżeli różne liczby  $c_1, c_2, \dots, c_k$  są pierwiastkami wielomianu  $f$ , to  $f$  jest podzielny przez wielomian  $(x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_k)$ .

**Definicja.** Mówimy, że liczba  $c$  jest pierwiastkiem wielomianu  $f$  krotności  $k$ , jeżeli  $f(x)$  jest podzielny przez dwumian  $(x - c)^k$  i nie jest podzielny przez  $(x - c)^{k+1}$ .

- 
1. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu  
(a)  $x^4 + x^2 - 6$  przez  $x^2 - 2x - 3$ , (b)  $2x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x - 1$  przez  $x^2 + 1$ .
  2. Dla jakich wartości  $a, b$  wielomian  $x^3 + ax^2 + bx - 6$  jest podzielny przez (a)  $x + 1$ ,  
(b)  $x^2 - 3x + 2$ ?
  3. Wielomian  $f$  daje resztę  $-1$  przy dzieleniu przez  $x - 1$ , resztę  $2$  przy dzieleniu przez  $x - 2$  i resztę  $11$  przy dzieleniu przez  $x - 3$ . Wyznacz resztę z dzielenia  $f$  przez  $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ .
  4. Niech  $n \in \mathbb{N}$ . Udowodnij, że wielomian  $nx^{n+1} - (n + 1)x^n + 1$  jest podzielny przez  $(x - 1)^2$ .
  5. Dla jakich  $n \in \mathbb{N}$  wielomian  $x^2 + x + 1$  dzieli wielomian  $(x + 1)^n - x^n - 1$ ?
  6. Liczba  $1$  jest pierwiastkiem wielomianu  $w$ . Pokaż, że wielomian  $v(x) = w(x^n)$  jest podzielny przez wielomian  $x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$ .

---

## ZADANIA DODATKOWE

7. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu  $x^{2022} - 2021x^{1011} + x^2 - 5x + 2021$  przez  $x^2 - 1$ .
8. Wykaż, że liczby  $1$  i  $-1$  to jedyne rzeczywiste pierwiastki wielomianu

$$f(x) = x^7 + x^6 - x^5 - x^4 + x^3 + x^2 - x - 1.$$

9. Dla jakich  $a, b$  wielomian  $w(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 8x + 1$  jest kwadratem innego wielomianu?

10. Udowodnij, że wielomian  $P(x) = x^{2n} - 2x^{2n-1} + 3x^{2n-2} - \dots - 2nx + (2n + 1)$  nie ma pierwiastków rzeczywistych.
11. Niech  $p$  będzie wielomianem stopnia  $n$  takim, że  $p(k) = \frac{k}{k+1}$  dla  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ . Oblicz  $p(n + 1)$ .
12. Wyznacz współczynniki  $a$  i  $b$  wielomianu  $w(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ , jeżeli dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  zachodzi równość  $w(x - 1) - w(x) = -3x^2 + 3x - 6$ .