

Wielomiany I

Poniżej $\mathbb{K}$ oznacza zbiór $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. W każdym twierdzeniu lub zadaniu $\mathbb{K}$ zawsze oznacza ten sam zbiór.

Definicja. Wielomianem stopnia k o współczynnikach $a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$, gdzie $a_k \neq 0$, nazywamy funkcję $w : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (lub $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jeśli $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$)

$$w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k.$$

Stopień wielomianu w oznaczamy $\deg w$. Liczbę a_k nazywamy *współczynnikiem wiodącym* wielomianu w . Jeżeli $a_k = 1$, to mówimy, że w jest wielomianem *unormowanym* lub *monicznym*. Stopień wielomianu zerowego $w_0(x) = 0$ jest równy $-\infty$.

Każdą liczbę $\alpha \in \mathbb{C}$ taką, że $w(\alpha) = 0$ nazywamy *pierwiastkiem* lub *miejscem zerowym* lub *zerem* wielomianu w .

Zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach zespolonych oznaczamy $\mathbb{C}[x]$. Analogicznie definiujemy zbiory $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ i $\mathbb{Z}[x]$. Każdy z tych zbiorów jest zamknięty ze względu na operacje dodawania, odejmowania, mnożenia i składania funkcji.

Lemat. Niech $w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{k-1}x^{k-1} + a_kx^k$, $a_j \in \mathbb{C}$, będzie wielomianem stopnia $k \geq 1$. Wówczas istnieje liczba rzeczywista M taka, że

$$|a_kx^k| > |w(x) - a_kx^k|, \quad \text{gdy } |x| > M.$$

Tw. (Pierwsze twierdzenie o równości wielomianów). Załóżmy, że wielomiany

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k \quad \text{ i } \quad g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$$

gdzie $a_j, b_j \in \mathbb{C}$ i $a_k, b_n \neq 0$, spełniają dla każdego $x \in \mathbb{C}$ równość $f(x) = g(x)$. Wówczas $k = n$ i $a_j = b_j$ dla $j = 0, 1, \dots, k$.

1. Liczba zespolona x_0 jest pierwiastkiem wielomianu $P \in \mathbb{R}[x]$. Wykaż, że liczba $\overline{x_0}$ też jest pierwiastkiem tego wielomianu.

2. Niech $a, b \in \mathbb{R}$. Wyznacz pierwiastki zespolone wielomianu

$$p(x) = x^3 - 3abx + a^3 + b^3.$$

3. Znajdź wielomian z $\mathbb{Z}[x]$, którego pierwiastkiem jest liczba (a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, (b) $i + \sqrt[3]{2}$.

4. Pokaż, że wielomian $w(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ jest

(i) funkcją nieparzystą wtedy tylko wtedy, $a_k = 0$ dla parzystych k ;

(ii) funkcją parzystą wtedy i tylko wtedy, gdy $a_k = 0$ dla nieparzystych k .

5. Udowodnij, że wielomian stopnia nieparzystego o współczynnikach rzeczywistych jest funkcją (określoną na $\mathbb{R}$) nieograniczoną z dołu i z góry

6. Udowodnij, że funkcje (a) $\frac{x}{1+x^2}$, (b) $\sqrt[3]{x}$, $n \in \mathbb{N}$ nie są wielomianami.

7. Wyznacz wszystkie wielomiany $p \in \mathbb{R}[x]$ takie, że $p(x^2) = p(x)^2$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

8. Niech $n > 1$ i $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że wielomian

$$w(x) = x^{2n} - x^{2n-1} + x^{2n-2} - x^{2n-3} + \dots + x^2 - x + \frac{n}{4}$$

nie ma pierwiastków rzeczywistych.

ZADANIA DODATKOWE

9. Znajdź wielomian z $\mathbb{Z}[x]$, którego pierwiastkiem jest liczba (a) $2 - \sqrt{5}$, (b) $1 - \sqrt[3]{3}$, (c) $i\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$, (d) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

10. Załóżmy, że f i g są wielomianami. Udowodnij, że

(i) funkcja $f + g$ jest wielomianem i $\deg(f + g) \leq \max(\deg f, \deg g)$, oraz jeśli $\deg f > \deg g$, to $\deg(f + g) = \deg f$;

(ii) funkcja $f \cdot g$ jest wielomianem i $\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$;

(iii) funkcja $f \circ g$ jest wielomianem i $\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g$.

11. Udowodnij, że dla każdego wielomianu $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ istnieje wielomian $g \in \mathbb{K}[x]$ taki, że $f(x) = g(x+1) - g(x)$ dla każdego x .

12. Korzystając z zadania 2. wyznacz wzory na pierwiastki wielomianu $x^3 + px + q$, gdzie $p, q \in \mathbb{R}$.

Uwaga: Każdy wielomian zmiennej y postaci $y^3 + ay^2 + by + c$ można za pomocą podstawienia liniowego sprowadzić do wielomianu $x^3 + px + q$.

13. Udowodnij, że wielomian $w(x) = x^3 - 2x$ nie jest różnowartościowy na zbiorze liczb rzeczywistych i jest różnowartościowy na zbiorze liczb wymiernych.

14. Udowodnij, że wielomian stopnia parzystego i dodatniego o współczynnikach rzeczywistych i dodatnim współczynnikiem wiodącym jest funkcją ograniczoną z dołu i nieograniczoną z góry.

15. Wielomian P stopnia $n > 1$ ma współczynniki całkowite, $x, y \in \mathbb{Z}$ i $P(x) \neq P(y)$. Udowodnij, że $|P(x) - P(y)| \geq |x - y|$.

16. Niech $f \in \mathbb{Z}[x]$. Udowodnij, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{Z}$ liczba $f(a + \sqrt{b}) + f(a - \sqrt{b})$ jest całkowita.

17. Wyznacz współczynniki a i b wielomianu $w(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$, jeżeli dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $w(x-1) - w(x) = -3x^2 + 3x - 6$.