

Przekształcenia algebraiczne

Zakładamy, że wszystkie zmienne są rzeczywiste, chyba że jest napisane inaczej.

Uprość wyrażenia

$$1. \left(a + (a^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} + \left(a - (a^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}$$

$$2. \sqrt[3]{(a^2 + 1)\sqrt{1 + \frac{1}{a^2}}} + \sqrt[3]{(a^2 - 1)\sqrt{1 - \frac{1}{a^2}}}, \text{ dla } a > 1.$$

$$3. \sqrt{x \cdot \frac{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}} + 1 - \sqrt{\frac{1+x^2}{2x}} - 1}{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}} + 1 + \sqrt{\frac{1+x^2}{2x}} - 1}}, \text{ dla } x > 0.$$

$$4. \left(\frac{\left(a + \sqrt{ab}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\sqrt{ab} + b\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(a - \sqrt{ab}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\sqrt{ab} - b\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(a + \sqrt{ab}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\sqrt{ab} + b\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(a - \sqrt{ab}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\sqrt{ab} - b\right)^{-\frac{1}{2}}} \right)^2 \text{ dla } 0 < b < a.$$

$$5. \left(p \cdot \frac{p^3 - 2q^3}{p^3 + q^3}\right)^3 + \left(q \cdot \frac{2p^3 - q^3}{p^3 + q^3}\right)^3 + q^3$$

$$6. \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt[6]{a}} \left(\frac{1}{\sqrt[6]{b^5}} - \frac{1}{\sqrt[3]{a}\sqrt[2]{b}}\right)\right)^3}, \text{ dla } a, b > 0.$$

$$7. \left(\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}\right)^2, \text{ dla } a, b > 0, a \neq b.$$

$$8. \frac{(a^2 - b^2)(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})}{\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{ab^3} - \sqrt[3]{a^3b} - \sqrt[3]{b^4}}, \text{ dla } |a| \neq |b|.$$

ZADANIA DODATKOWE

Uprość wyrażenia.

$$9. \left(\frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} - \frac{\sqrt{1+x}}{1 + \sqrt{x}}\right)^2 - \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} - \frac{\sqrt{1+x}}{1 - \sqrt{x}}\right)^2, \text{ dla } x > 0, x \neq 1$$

$$\text{Odp: } \frac{16x\sqrt{x}}{(1-x^2)(x-1)}.$$

$$10. 1 - \frac{2}{x} - \left(\frac{2x + x^2}{4 + 2x + x^2} + \frac{2x - x^2}{4 - 2x + x^2}\right) \cdot \left(\frac{16 - 8x}{4 - 2x + x^2} - \frac{16 + 8x}{4 + 2x + x^2}\right)^{-1}, x \neq 0$$

$$\text{Odp: } \left(\frac{x-1}{x}\right)^2.$$

$$11. \frac{\left(m^2 - \frac{1}{n^2}\right)^m \cdot \left(n + \frac{1}{m}\right)^{n-m}}{\left(n^2 - \frac{1}{m^2}\right)^n \cdot \left(m - \frac{1}{n}\right)^{m-n}}$$

$$\text{Odp: } \left(\frac{m}{n}\right)^{m+n}.$$

$$12. \left((\sqrt[4]{p} - \sqrt[4]{q})^{-2} + (\sqrt[4]{p} + \sqrt[4]{q})^{-2}\right) \cdot \frac{p - q}{\sqrt{p} + \sqrt{q}}$$

$$\text{Odp: } \frac{2(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2}{p - q}.$$

$$13. \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{a + \sqrt{a^2 - b^2}} - \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}}\right) \cdot \frac{b^2}{\sqrt{a^4 - a^2b^2}}, \text{ dla } |a| > |b|.$$

$$\text{Odp: } \frac{2b^2}{|a|\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

$$14. (x^{-1} + a^{-1})(x + a)^{\frac{1}{n}} - b^{-1}x^{\frac{1}{n}} \text{ dla } x = ab^{\frac{n}{n+1}}(a^{\frac{n}{n+1}} - b^{\frac{n}{n+1}})^{-1}, a > b > 0, n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Odp: } 0.$$