

Liczby zespolone III

Pierwiastki z liczby zespolonej. Niech $a = |a| \cdot \text{cis} \phi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i $n \in \mathbb{N}$. Wszystkie liczby zespolone w spełniające równanie $w^n = a$ są postaci

$$w_k = \sqrt[n]{|a|} \left(\cos \left(\frac{2k\pi + \phi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{2k\pi + \phi}{n} \right) \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Liczby te nazywamy *zespolonymi pierwiastkami stopnia n z liczby zespolonej a* .

Uwaga 1. Liczby w_k są wszystkie różne, więc każda liczba zespolona $a \neq 0$ ma dokładnie n różnych pierwiastków stopnia n .

Uwaga 2. Aby uniknąć niejednoznaczności, dla $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ **nie będziemy** stosować zapisu $\sqrt[n]{a}$ na oznaczenie którejkolwiek z liczb w_k .

Pierwiastki z jedności. Dla $a = 1$ otrzymujemy n różnych zespolonych pierwiastków z jedności stopnia n :

$$\varepsilon_k = \cos \left(\frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

1. Wyznacz w postaci algebraicznej pierwiastki zespolone

- (a) stopnia 3 z 1, (b) Stopnia 4 z -4 , (c) stopnia 3 z $2 + 2i$.

2. Oblicz $\cos \frac{2\pi}{5}$ oraz $\sin \frac{2\pi}{5}$

3. Oblicz sumę i iloczyn wszystkich pierwiastków z jedności stopnia n .

4. Rozwiąż równania

- (a) $81(z+i)^4 = |z|^8$,
 (b) $(z+2)^6 = (z-2)^6$,
 (c) $(z+i)(\bar{z}-i)^2(iz-1)^3 = 64$

5. Liczba zespolona $z \neq 0$ spełnia równość

$$\left(z + \frac{1}{z} \right) \left(z + \frac{1}{z} + 1 \right) = 1.$$

Dla danej liczby naturalnej $n > 1$ znajdź wartość wyrażenia

$$\left(z^n + \frac{1}{z^n} \right) \left(z^n + \frac{1}{z^n} + 1 \right).$$

6. Oblicz $\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11}$.

7. Niech $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$ i $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ oznaczają wszystkie zespolone pierwiastki z jedności stopnia n . Pokaż, że dla dowolnej liczby $z \in \mathbb{C}$ zachodzi równość

$$z = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \text{Re}(\varepsilon_k \bar{z}) \cdot \varepsilon_k.$$

ZADANIA DODATKOWE

8. Wyznacz w postaci algebraicznej pierwiastki zespolone

- (a) stopnia 8 z -1 , (a) stopnia 6 z 1 , (b) stopnia 4 z $2 - 2i$.

9. Wykaż, że liczba $\xi = (2+i)/(2-i)$ nie jest pierwiastkiem z jedności jakiegokolwiek stopnia mimo, że $|\xi| = 1$.

10. Niech $z = e^{i\theta}$. Pokaż, że $\cos(n\theta) = \frac{1}{2} \left(z^n + \frac{1}{z^n} \right)$ oraz $\sin(n\theta) = \frac{1}{2i} \left(z^n - \frac{1}{z^n} \right)$.

11. Załóżmy, że $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 0$. Udowodnij, że

- (a) $\cos(2\alpha) + \cos(2\beta) + \cos(2\gamma) = \sin(2\alpha) + \sin(2\beta) + \sin(2\gamma) = 0$,
 (b) $3 \cos(\alpha + \beta + \gamma) = \cos(3\alpha) + \cos(3\beta) + \cos(3\gamma)$,
 (c) $3 \sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin(3\alpha) + \sin(3\beta) + \sin(3\gamma)$.

12. Rozstrzygnij, dla jakich liczb całkowitych n istnieje liczba rzeczywista a taka, że

$$|a - (1+i)^n| = a.$$

13. Niech $z \in \mathbb{C}$. Dla jakich liczb całkowitych n liczba $(z + i\bar{z})^n$ jest rzeczywista?

14. Dana jest liczba naturalna $n \geq 3$, $\varepsilon \neq 1$ jest pierwiastkiem z jedności stopnia n . Udowodnij, że

$$|1 - \varepsilon| > \frac{2}{n-1}.$$

15. Niech $x, y, z \in \mathbb{C}$, $|x| = |y| = |z| = a > 0$ oraz $x + y + z \neq 0$. Udowodnij, że

$$\left| \frac{xy + yz + zx}{x + y + z} \right| = a.$$

16. Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz z jest liczbą zespoloną o module 1. Udowodnij, że

$$n|1+z| + |1+z^2| + |1+z^3| + \dots + |1+z^{2n}| + |1+z^{2n+1}| \geq 2n.$$

17. Niech $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{C}$. Stosując zasadę indukcji (lub innym sposobem) udowodnij *tożsamość Lagrange'a*:

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^2 \right) - \left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right|^2 = \sum_{1 \leq j < k \leq n} |x_j \bar{y}_k - x_k \bar{y}_j|^2.$$

Następnie udowodnij *nierówność Cauchy'ego - Schwarza*:

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^2 \right) \geq \left| \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k \right|^2.$$