

Liczby zespolone II

Postać trygonometryczna liczby zespolonej: Każdą liczbę zespoloną $z \neq 0$ można zapisać w postaci

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad \text{gdzie } r = |z| > 0, \theta \in \mathbb{R}.$$

Liczbę θ nazywamy argumentem liczby zespolonej z . Dla $z \neq 0$, jeżeli $\theta \in [0, 2\pi)$, to mówimy, że θ jest *argumentem głównym* liczby z .

Stosowana jest również notacja $\cos \theta + i \sin \theta = \operatorname{cis} \theta = e^{i\theta}$. Pełny sens matematyczny zapisu $e^{i\theta}$ stanie się jasny kiedy indziej.

Stw. 4. Jeżeli $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ i $w = s(\cos \phi + i \sin \phi)$, gdzie $r, s > 0$, $\theta, \phi \in \mathbb{R}$, to

(i) $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$, jeśli $z \neq 0$;

(ii) $z \cdot w = rs \cdot (\cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi))$;

(iii) $\frac{z}{w} = \frac{r}{s}(\cos(\theta - \phi) + i \sin(\theta - \phi))$;

(iv) **(Wzór de Moivre'a)** Dla $n \in \mathbb{Z}$, $z \neq 0$ zachodzi

$$z^n = r^n \cdot (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)).$$

1. (i) Udowodnij, że dla każdej liczby zespolonej $a \neq 0$ istnieją dokładnie dwie różne liczby zespolone v, w takie, że $u^2 = v^2 = a$.

(ii) Udowodnij, że dla dowolnych liczb zespolonych a, b, c takich, że $a \neq 0$ i $b^2 \neq 4ac$ równanie kwadratowe $az^2 + bz + c = 0$ ma dwa różne rozwiązania zespolone.

(iii) Udowodnij, że jeśli $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ i $b^2 < 4ac$, to rozwiązania zespolone z_1, z_2 równania $az^2 + bz + c = 0$ spełniają zależność $z_2 = \overline{z_1}$.

2. Rozwiąż równania

(a) $z^2 - 4z - 5 = 0$

(c) $z^3 = -8$

(b) $z^2 - (1 + i)z + 6 + 3i = 0$

3. Rozwiąż w liczbach zespolonych układ równań

$$\begin{cases} xy(x + y) = 30 \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases}$$

4. Zapisz liczby zespolone w postaci trygonometrycznej: (a) i , (b) $2 + 2i$, (c) $-1 + \sqrt{3}i$, (d) $(\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1)i$,

5. Wyznacz postać trygonometryczną liczb: (a) $\sin \alpha + i \cos \alpha$, (b) $1 + \cos \alpha + i \sin \alpha$, dla $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, (c) $1 + i \operatorname{tg} \alpha$.

6. Zapisz liczby zespolone w postaci algebraicznej

(a) $(1 + i)^{2025}$,

(b) $(1 + i\sqrt{3})^{1000}$,

(c) $\left(\frac{1 + i}{1 + i\sqrt{3}}\right)^{-100}$

7. Wyraż $\cos(5x)$ i $\sin(5x)$ poprzez $\cos x$ i $\sin x$.

8. Udowodnij *tożsamość Lagrange'a* dla cosinusów:

$$\sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{2 \sin \frac{1}{2}x} - \frac{1}{2} \quad \text{dla } x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

ZADANIA DODATKOWE

9. Rozwiąż równania / układy równań w liczbach zespolonych

(a) $z^2 + (2i - 7)z + 13 - i = 0$

(b) $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$

(c) $z^4 + 4 = 0$,

(d) $\begin{cases} x^2 + 3 = 2xy \\ 6x^2 - 11y^2 = 10 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 36 \\ xy^2 - x^2y = 324 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 12 \\ x + xy + y = 0 \end{cases}$

10. Zapisz liczby w postaci trygonometrycznej

(a) $-1 + i$,

(c) $2 + \sqrt{3} + i$,

(b) $\frac{3 + 2i}{-2 + 3i}$,

(d) $1 + i\sqrt{3}/3$.

11. Wyznacz postać trygonometryczną liczb:

(a) $\frac{3 + 2i}{-2 + 3i}$,

(d) $\cos \alpha - i \sin \alpha$,

(b) $2 + \sqrt{3} + i$,

(c) $1 + i\sqrt{3}/3$.

(e) $\frac{1 + i \operatorname{tg} \alpha}{1 - i \operatorname{tg} \alpha}$

12. Zapisz liczby w postaci algebraicznej

(a) $\left(\frac{9 + 5i}{7 - 2i}\right)^8$,

(b) $\frac{(\sqrt{3} + 3i)^{40}}{(\sqrt{3} + i)^{20}}$,

(c) $(2 - \sqrt{2} + i)^{24}$.

13. Wyraż $\operatorname{tg}(5x)$ przez $\operatorname{tg} x$.

14. Dana jest liczba zespolona z taka, że $z + z^{-1} = \sqrt{3}$. Wyznacz wartość wyrażenia $z^n + z^{-n}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

15. Udowodnij *tożsamość Lagrange'a* dla sinusów:

$$\sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\cos((n + \frac{1}{2})x) - \cos \frac{1}{2}x}{2 \sin \frac{1}{2}x} \quad \text{dla } x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$