

Teoria liczb II – kongruencje

Niech a i b będą liczbami całkowitymi, zaś m liczbą naturalną.

Definicja. Mówimy, że a przystaje do b modulo m wtedy i tylko wtedy, gdy $m \mid a - b$. Zapisujemy to jako

$$a \equiv b \pmod{m} \iff m \mid a - b$$

i nazywamy *kongruencją / przystawaniem modulo m* .

Zauważmy, że $a \equiv b \pmod{m}$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczby a i b dają te same reszty po podzieleniu przez m .

Jeżeli a nie przystaje do b modulo m , to piszemy $a \not\equiv b \pmod{m}$.

Stw. (Podstawowe własności kongruencji) Niech $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$.

- (i) $a \equiv a \pmod{m}$ (zwrotność),
- (ii) $a \equiv b \pmod{m}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b \equiv a \pmod{m}$ (symetria),
- (iii) jeśli $a \equiv b \pmod{m}$ i $b \equiv c \pmod{m}$, to $a \equiv c \pmod{m}$ (przechodność),
- (iv) jeśli $a \equiv b \pmod{m}$ i $c \equiv d \pmod{m}$, to $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ oraz $a - c \equiv b - d \pmod{m}$;
- (v) jeśli $a \equiv b \pmod{m}$ i $c \equiv d \pmod{m}$, to $ac \equiv bd \pmod{m}$.

Uwaga. Nie jest prawdą, że jeśli $a \equiv b \pmod{m}$ oraz $d \mid a$ i $d \mid b$, to $\frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \pmod{m}$.

1. Wyznacz resztę z dzielenia liczby (a) $28 \cdot 33 \cdot 73$ przez 35, (b) 111111 przez 17.
2. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $n \equiv 3 \pmod{4}$. Udowodnij, że n nie jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych.
3. Niech $n, m \in \mathbb{N}$ i r_k to reszta z dzielenia liczby n^k przez m dla $k = 1, 2, 3, \dots$. Wykaż, że od pewnego momentu liczby r_k będą się powtarzać cyklicznie. Wyznacz te cykle dla (a) $n = 2, m = 17$; (b) $n = 6, m = 32$.
4. Znajdź resztę z dzielenia (a) 3^{89} przez 7 (b) 4^{2026} przez 26
5. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że (a) $7 \mid 2^{n+2} + 3^{2n+1}$, (b) $13 \mid 3^{3n+1} + 9^{3n+1} + 1$
6. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n , dla których $7 \mid 2^n - 1$.
7. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $S_{10}(n)$ oznacza sumę cyfr liczby n w zapisie dziesiętnym. Udowodnij, że $n \equiv S_{10}(n) \pmod{3}$ i $n \equiv S_{10}(n) \pmod{9}$.
8. Niech $x, y \in \mathbb{Z}$. Wykaż, że $7 \mid 10x + y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $7 \mid x - 2y$. Następnie sprawdź, czy $7 \mid 4378479$.

9. Wyznacz resztę z dzielenia przez 7 liczby

$$\sum_{k=1}^{10} 10^{10^k}.$$

ZADANIA DODATKOWE

10. Wyznacz resztę z dzielenia liczby 123456789 przez 13
11. Liczb n jest nieparzysta. Wykaż, że $n^2 \equiv 1 \pmod{8}$.
12. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $n \equiv k \pmod{8}$, gdzie $k = 3, 6, 7$. Udowodnij, że liczba n nie jest sumą kwadratów dwóch liczb całkowitych.
13. Udowodnij, że $10 \mid 53^{53} - 33^{33}$.
14. Znajdź resztę z dzielenia 9^{1000} przez 210
15. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że
 - (a) $21 \mid 2^{4^n} + 5$,
 - (b) $19 \mid 20^{2n} + 16^{2n} - 3^{2n} - 1$.
16. Wyznacz dwie ostatnie cyfry dziesiętne liczb
 - (a) $99^{99} - 51^{51}$,
 - (c) 9^{9^9} ,
 - (b) $5^{5^{55}}$,
 - (d) $3^{4^{5^67}}$.
17. Wykaż, że $7 \nmid 2^n + 1$ dla każdej liczby naturalnej n .
18. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $S_k(n)$ oznacza sumę cyfr liczby n w zapisie o podstawie k . Udowodnij, że $n \equiv S_k(n) \pmod{k-1}$.
19. Niech $n \in \mathbb{N}$. Wykaż, że $11 \mid n$ wtedy i tylko wtedy, gdy naprzemienna suma cyfr dziesiętnych liczby n jest podzielna przez 11.
20. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n takie, że $3 \mid n2^n + 1$.
21. Udowodnij, że $2^n \nmid 3^n + 1$ dla każdej liczby naturalnej n .
22. Liczba naturalna n jest nieparzysta. Wykaż, że $n \mid 2^{n!} - 1$.
23. Liczby k, n są naturalne i $2 \nmid k$. Wykaż, że $2^{n+2} \mid k^{2^n} - 1$.