

Teoria liczb I – Podzielność

Niech $a, b \in \mathbb{Z}$. Mówimy, że liczba a jest dzielnikiem liczby b (liczba b jest podzielna przez a), jeżeli istnieje liczba $c \in \mathbb{Z}$ taka, że $b = a \cdot c$. Piszemy wtedy $a \mid b$. Jeżeli a nie jest dzielnikiem b , piszemy $a \nmid b$.

Przydatne własności podzielności liczb:

- (i) $a \mid 0$ oraz $a \mid a$ dla każdej liczby całkowitej a .
- (ii) Jeżeli $a \mid b$ i $b \neq 0$, to $|a| \leq |b|$.
- (iii) Jeżeli $a \mid b$ i $a \mid c$ oraz $x, y \in \mathbb{Z}$, to $a \mid bx + cy$.
- (iv) Jeżeli $a \mid b$ i $b \mid c$, to $a \mid c$.
- (v) Jeżeli $a \mid b$ i $b \mid a$, to $|a| = |b|$.
- (vi) Jeżeli $a \mid b$ i $b \neq 0$, to $\frac{b}{a} \mid b$.
- (vii) Jeżeli $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ to $a \mid b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $ac \mid bc$.

Tw. o dzieleniu z resztą. Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich a, b istnieją jednoznacznie wyznaczone liczby całkowite k i r takie, że $0 \leq r < a$ oraz $b = ak + r$. Liczbę r nazywamy resztą z dzielenia a przez b .

W dowodzie tw. o dzieleniu z resztą, jak i w dowodach innych twierdzeń z teorii liczb, można skorzystać z następującego twierdzenia:

Zasada minimum. Każdy niepusty podzbiór zbioru liczb naturalnych zawiera element najmniejszy.

Przypomnienie: **Najważniejsza tożsamość arytmetyki:**

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

-
1. Znajdź wszystkie liczby $n \in \mathbb{Z}$ takie, że (a) $n + 1 \mid n^2 + 1$, (b) $n - 1 \mid n^5 + 5$.
 2. Liczby a i b są nieparzyste. Wykaż, że liczba $a^2 + b^2$ nie jest kwadratem.
 3. Udowodnij, że $13 \mid 2^{70} + 3^{70}$.
 4. Udowodnij (korzystając tylko z zawartości tej kartki), że jeśli liczba nieparzysta d jest dzielnikiem liczby $2^k n$, gdzie $k, n \in \mathbb{N}$, to d jest dzielnikiem n .
 5. Znajdź wszystkie liczby $n \in \mathbb{Z}$ takie, że $2n + 1 \mid n^3 - 3n + 2$.
 6. Suma reszt z dzielenia liczb całkowitych a, b przez d wynosi d . Udowodnij, że
 - (a) $d \mid a^k - b^k$ dla dowolnej liczby naturalnej parzystej k ,
 - (b) $d \mid a^k + b^k$ dla dowolnej liczby naturalnej nieparzystej k .
 7. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi $n^2 \mid (n + 1)^n - 1$.

8. Udowodnij, że iloczyn n kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez $n!$.

9. Załóżmy, że $a, b \in \mathbb{Z}$ oraz $a + b \mid a^2 + ab + b^2$. Udowodnij, że

$$(a + b)^2 \mid a^4 + b^4.$$

10. Niech $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ i

$$d \mid a + b + c \quad \text{oraz} \quad d \mid a^2 + b^2 + c^2.$$

Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$d \mid a^{(2^n)} + b^{(2^n)} + c^{(2^n)}.$$

ZADANIA DODATKOWE

11. Liczba n jest nieparzysta. Wyznacz resztę z dzielenia liczby $3n^3 + 2n^2 + n - 1$ przez 8.
12. Wyznacz wszystkie liczby $n \in \mathbb{Z}$ takie, że (a) $n + 1 \mid n^2 + 1$ (b) $2n + 1 \mid 8n^2 + 17$.
13. Znajdź największą liczbę całkowitą n taką, że $n + 10 \mid n^3 + 100$.
14. Wykaż, że $19 \mid 5^{2025} + 2^{2025}$.
15. Liczby $p, q > 2$ są nieparzyste. Udowodnij, że

$$p \mid 1^q + 2^q + \dots + (p - 1)^q.$$

16. Liczba k jest parzysta. Czy istnieje k liczb naturalnych nieparzystych $n_1, n_2, \dots, n_k$ takich, że

$$1 = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_k}?$$

17. Niech $n \in \mathbb{Z}$. Jakie są możliwe reszty z dzielenia n^2 przez 3, 4, 7?
18. Liczby a, b, c, d są nieparzyste. Udowodnij, że liczba $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ jest podzielna przez 4 i nie jest podzielna przez 8.
19. Niech $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ i $a - c \mid ab + cd$. Wykaż, że $a - c \mid ad + bc$.
20. Znajdź wszystkie liczby naturalne n takie, że liczba otrzymana z n poprzez usunięcie cyfry jedności w zapisie dziesiętnym jest dzielnikiem n .
21. Niech $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Wykaż, że $6 \mid a + b + c$ wtedy i tylko wtedy, gdy $6 \mid a^3 + b^3 + c^3$.
22. Udowodnij, że $(2^n - 1)^2 \mid 2^{(2^n - 1)n} - 1$ dla każdej liczby naturalnej n .