

Kombinatoryka III

Wariacją k -wyrazową z powtórzeniami zbioru A nazywamy każdy ciąg długości k o wyrazach ze zbioru A .

Tw. 1. Liczba k -wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru n -elementowego wynosi n^k .

Wariacją k -wyrazową bez powtórzeń zbioru A nazywamy każdy ciąg długości k o różnych wyrazach ze zbioru A .

Tw. 2. Liczba wariacji k -wyrazowych bez powtórzeń zbioru n -elementowego wynosi $\frac{n!}{(n-k)!}$ jeśli $n \geq k$ i 0 jeśli $n < k$.

Permutacją zbioru n -elementowego A nazywamy każde ustawienie wszystkich elementów zbioru A w ciąg.

Tw. 3. Liczba permutacji zbioru n -elementowego wynosi $n!$.

Niech $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $k \leq n$. *Kombinacją k -elementową zbioru n -elementowego A nazywamy każdy k -elementowy podzbiór zbioru A .*

Tw. 4. Niech $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $k \leq n$. Liczba k -elementowych kombinacji (czyli k -elementowych podzbiorów) zbioru n -elementowego jest równa $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$.

$\binom{n}{k}$ nazywamy *symbolem Newtona* i odczytujemy „ n po k ” lub „ n nad k ”.

- Na ile sposobów można rozmieścić k ponumerowanych kul w n ponumerowanych urnach?
- Na ile sposobów można rozmieścić k ponumerowanych kul w n ponumerowanych urnach tak, aby w pierwszej urnie była co najmniej jedna kula?
- Ile różnych dzielników naturalnych ma liczba $2^5 \cdot 3^5 \cdot 5^4$?
- Spośród uczniów klasy 1a należy wybrać 4-osobowy samorząd. Na ile sposobów można to zrobić? Na ile sposobów można wybrać czteroosobowy samorząd tak, aby należała do niego co najmniej jedna dziewczyna i co najmniej jeden chłopak? Zakładamy, że każda osoba z samorządu pełni inną funkcję.
- Ile jest różnych ustawień 9 osób w szereg takich, że wybrane 3 osoby stoją jedna po drugiej?
- Ile jest różnych sposobów posadzenia n osób przy okrągłym stole? Dwa usadzenia uznajemy za takie same, jeżeli w obu każda osoba ma tych samych sąsiadów.
- Ile jest permutacji zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 31\}$ takich, że iloczyn każdych dwóch sąsiednich liczb jest parzysty?
- Ile różnych prostokątów można utworzyć z pól szachownicy 8×8 ?

- Wyznacz liczbę ciągów (a_1, a_2, a_3, a_4) takich, że $a_i \in \mathbb{N}$ oraz $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 10$.
- Na ile sposobów można wypełnić kupon totolotka (zakreślamy 6 liczb od 1 do 49) tak, że zakreślone zostaną co najmniej 2 kolejne liczby?
- Na ile sposobów można posadzić na 25 miejscowej ławie 10 panów i 15 pań tak, aby między każdymi dwoma panami siedziała co najmniej jedna pani?
- Na ile sposobów można podzielić zbiór 12 elementowy na 6 rozłącznych podzbiorów 2-elementowych?
- Na ile sposobów można rozmieścić 9 uczniów w 3 pokojach trzyosobowych, gdy
 - każdy może dzielić pokój z każdym,
 - pewnych dwóch uczniów nie chce mieszkać razem,
 - pewnych dwóch uczniów chce mieszkać razem?
- Podaj kombinatoryczne dowody tożsamości (a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
 (b) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ (c) $k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$ (d) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

ZADANIA DODATKOWE

- Na ile sposobów można rozmieścić k ponumerowanych kul w n ponumerowanych urnach tak, aby w pierwszej i ostatniej urnie była co najmniej jedna kula?
- Ile dzielników naturalnych ma liczba $3^4 \cdot 7^5 \cdot 11^6 \cdot 13^2$?
- Ile jest różnych liczb k -cyfrowych o wszystkich cyfrach różnych od 0, które są (a) podzielne przez 2, (b) podzielne przez 3.
- Na płaszczyźnie danych jest 14 prostych, z których żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. Ile jest trójkątów, których boki należą do tych prostych?
- Ile jest permutacji zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 31\}$ takich, że na parzystych miejscach jest liczba parzysta?
- Na ile sposobów można rozmieścić k identycznych kul w n ponumerowanych urnach?
- Wyznacz liczbę ciągów $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ takich, że $a_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 20$
- Na ile sposobów można podzielić zbiór 15 elementowy na dwa zbiory 6-elementowe i jeden zbiór 3-elementowy?
- Trójkąt równoboczny o boku n podzielono odcinkami równoległymi do jego boków na małe trójkąty równoboczne o boku 1. Ile różnych sześciokątów foremnych można utworzyć z tych małych trójkątów?
- Udowodnij tożsamości: (a) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$
 (b) $\sum_{k=0}^m \binom{n+k}{k} = \binom{n+m+1}{m}$, $n, m \in \mathbb{N}$ (c) $\sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k} 2^{n-k} = 2^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$.