
Kombinatoryka II

Niech A będzie zbiorem skończonym. *Moc zbioru* A jest to liczba jego elementów. Moc zbioru A zapisujemy jako $|A|$ lub $\overline{A}$.

Reguła dodawania. Jeżeli zbiory skończone $A_1, A_2, \dots, A_n$ są parami rozłączne, to

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|.$$

Reguła mnożenia. $A_1, A_2, \dots, A_k$ to zbiory skończone. Liczba różnych ciągów k -elementowych $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ takich, że $a_j \in A_j$ dla $j = 1, 2, \dots, k$ wynosi

$$|A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_k|.$$

-
1. Numer dowodu osobistego jest ciągiem trzech liter alfabetu łacińskiego i sześciu cyfr. Ile różnych dowodów osobistych można wydać?
 2. Ile jest różnych liczb czterocyfrowych, mających tą samą cyfrę setek i jedności?
 3. Ile jest różnych liczb pięciocyfrowych o nie powtarzających się cyfrach?
 4. Ile jest zgodnych z regułami gry w szachy ustawień na szachownicy 8×8 dwóch króli?
 5. Na ile sposobów można wybrać (a) podzbiór zbioru n -elementowego, (b) dwa rozłączne podzbiory zbioru n -elementowego?
 6. Zbiór A jest niepusty i skończony. Udowodnij, że A ma tyle samo podzbiorów o parzystej i o nieparzystej liczbie elementów.
 7. Udowodnij, że spośród dowolnych $2^{n-1} + 1$ różnych podzbiorów zbioru n -elementowego zawsze można wybrać dwa podzbiory rozłączne.
 8. Niech $n \in \mathbb{N}$. Jakich podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ jest więcej: tych, których suma elementów jest parzysta, czy tych, których suma elementów jest nieparzysta?

ZADANIA DODATKOWE

9. Zbiory A, B, C mają skończenie wiele elementów. Udowodnij, że

(a) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$,

(b) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$.

10. Ile jest różnych liczb 7-cyfrowych mających (a) dokładnie jedną cyfrę 1, (b) nie więcej niż dwie cyfry 1?

11. Ile jest możliwych ustawień na szachownicy dwóch hetmanów tak, aby jeden nie zagrażał drugiemu?
12. Zbiór A jest niepusty i skończony. Udowodnij, że dla dowolnego elementu $a \in A$ zbiór A ma tyle samo podzbiorów zawierających a i nie zawierających a .
13. Ile podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ nie zawiera dwóch kolejnych liczb?
14. Zbiór A ma n elementów, $B_j \subset A$, $j = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$, to różne podzbiory zbioru A , przy czym każde trzy z tych podzbiorów mają niepustą część wspólną. Udowodnij, że istnieje element należący do każdego ze zbiorów B_j .