

Nierówność Cauchy'ego

Definicja. Niech $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

- liczbę $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ nazywamy *średnią arytmetyczną* liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$.
- dla $a_k \geq 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$), liczbę $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$ nazywamy *średnią geometryczną* liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$.
- dla $a_k \neq 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$), liczbę $\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$ nazywamy *średnią harmoniczną* liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Twierdzenie (nierówność Cauchy'ego). Dla liczb nieujemnych $a_1, a_2, \dots, a_n$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Ponadto, równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Wniosek (nierówność między średnią geometryczną i harmoniczną). Dla liczb dodatnich $a_1, a_2, \dots, a_n$ prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

Ponadto, równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

1. Liczby $a_1, a_2, \dots, a_n$ są dodatnie. Udowodnij nierówność

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq n.$$

2. Dana jest liczba naturalna n . Udowodnij, że

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

3. Niech $0 \leq x \leq 3$. Wyznacz maksymalną wartość wyrażenia $x^2 \cdot \sqrt{3-x}$ i wskaż liczbę x , dla której ta wartość jest przyjmowana.

4. Wyznacz maksymalną wartość wyrażenia $(1+x)^4 \cdot \sqrt[3]{1-x}$, gdzie $-1 \leq x \leq 1$. Wskaż liczbę x , dla której ta wartość jest przyjmowana.

5. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{ab}.$$

6. Liczby a, b, c są dodatnie i $abc = 1$. Wykaż, że

$$a^4 + 2b^2 + 4c \geq 7.$$

7. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

8. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ spełniona jest nierówność

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \dots b_n} \leq \sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_n + b_n)}.$$

ZADANIA DODATKOWE

9. Niech $-1 \leq x \leq 1$. Wyznacz maksymalną wartość wyrażenia

$$(1 - x^2)\sqrt{1+x}$$

oraz liczbę x , dla której ta wartość jest przyjmowana.

10. Liczby a, b, c są dodatnie i $abc = 1$. Wykaż, że

$$a^3 + 2ab + 3bc + c^2 \geq 7.$$

11. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich x, y, z prawdziwa jest nierówność

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 8\sqrt{xyz} - 16.$$

Kiedy ta nierówność staje się równością?

12. Korzystając z nierówności Cauchy'ego, udowodnij nierówność Bernoulliego.

13. Udowodnij nierówność Cauchy'ego, korzystając z nierówności Bernoulliego.

14. Liczby dodatnie a, b, c, d spełniają warunek $abcd = 1$. Udowodnij, że

$$\frac{a}{b+c+d+1} + \frac{b}{c+d+a+1} + \frac{c}{d+a+b+1} + \frac{d}{a+b+c+1} \geq 1.$$

15. Liczby $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ są dodatnie. Udowodnij nierówność

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i b_i} \cdot \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \geq 4n^2.$$

16. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}}{3} \leq \sqrt[3]{a \cdot \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b+c}{3}}.$$