
Zasada indukcji II – Nierówności

1. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n spełniające nierówność

$$(a) \ 2^n > n^2 \qquad (b) \ n! > n^3 \qquad (c) \ (2n)! > 3^{n-1} \cdot (n!)^2 + 4^n$$

2. Wykaż, że dla $n \in \mathbb{N}$ i $a, b > 0$ zachodzi nierówność

$$(a + b)^n \leq 2^{n-1}(a^n + b^n).$$

3. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są nierówności

$$\sqrt{n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}.$$

4. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}.$$

5. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$\frac{3n}{2n+1} \leq 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

6. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

7. Niech p_n oznacza n -tą liczbę pierwszą (czyli $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, itd.) Udowodnij, że $p_n > 3n$ dla $n \geq 12$.

8. Udowodnij **nierówność Bernoulliego**:

Dla każdej liczby naturalnej n i liczby rzeczywistej $x \geq -1$ prawdziwa jest nierówność

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Kiedy zachodzi równość?

ZADANIA DODATKOWE

9. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n spełniające nierówność

$$\begin{array}{ll} (a) \ 3^n > (n+1) \cdot 2^n & (d) \ 2^n + n^2 < 3^n, \\ (b) \ 2^{n+1}(n!)^2 < (2n)!, & (e) \ n \cdot 5^n > 3^{n+1} + (n+1)^2 \cdot 2^n, \\ (c) \ 3^n > n \cdot 2^n, & (f) \ (n!)^2 > n^n. \end{array}$$

10. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\frac{n}{2} < \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \leq n.$$

11. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$\begin{array}{ll} (a) \ \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{7}{12}, \\ (b) \ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1, \\ (c) \ 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n}} < 3. \end{array}$$

12. Udowodnij **nierówność Weierstrassa**:

Dla liczb $x_1, x_2, \dots, x_n > -1$, które wszystkie są tego samego znaku, prawdziwa jest nierówność

$$(1+x_1) \cdot (1+x_2) \cdot \dots \cdot (1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\dots+x_n.$$

13. Niech $x \geq 0$ i $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij nierówność

$$(1+x)^n \geq 1+nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2.$$

14. Dane są liczby dodatnie $a_1, a_2, \dots, a_n$ takie, że $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$. Udowodnij, że $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \leq 1$.