

Zasada indukcji I

Zasada indukcji matematycznej. Dla $n \in \mathbb{N}$ niech T_n oznacza zdanie, które, w zależności od n , może być prawdziwe lub fałszywe.

Jeżeli spełnione są oba warunki:

- (i) *baza indukcji*: prawdziwe jest zdanie T_1 ,
- (ii) *krok indukcyjny*:

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad T_n \Rightarrow T_{n+1},$$

czyli dla każdej liczby naturalnej n ze zdania T_n wynika zdanie T_{n+1} ,

to dla każdej liczby naturalnej n zdanie T_n jest prawdziwe.

Uwaga: Bazą indukcji może być także zdanie T_k , gdzie k jest pewną liczbą całkowitą. Wówczas krok indukcyjny polega na udowodnieniu dla każdej liczby całkowitej $n \geq k$ implikacji $T_n \Rightarrow T_{n+1}$. Wówczas zdanie T_n jest prawdziwe dla każdej liczby całkowitej $n \geq k$.

1. Za pomocą zasady indukcji wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są równości:

$$(a) \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$(c) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1},$$

$$(b) \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$(d) \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

2. (**WAŻNE!!**) Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n i liczb rzeczywistych a, b prawdziwa jest tożsamość

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Natomiast jeżeli liczba n jest nieparzysta, to prawdziwa jest tożsamość

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

3. Za pomocą zasady indukcji udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$(a) 9 \mid 4^n + 15n - 1, \quad (b) 11 \mid 2^{6n+1} + 3^{2n+2}, \quad (c) 13 \mid 1000^n + (-1)^{n+1}.$$

4. Na płaszczyźnie narysowano n prostych w taki sposób, że żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. Udowodnij, że proste te dzielą płaszczyznę na $(n^2 + n + 2)/2$ obszarów.

5. Na ile obszarów dzieli płaszczyznę n okręgów narysowanych tak, że każde dwa mają 2 punkty wspólne i żadne trzy nie mają punktu wspólnego?
6. $A_1, A_2, \dots, A_n$ to zbiory. Udowodnij, że zbiór $A_1 \triangle A_2 \triangle \dots \triangle A_n$ składa się z tych elementów zbioru $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, które należą do nieparzystej liczby zbiorów A_k .
7. Agent Tajny dostał zadanie rozpracowania mafii handlującej dowodami fałszywych twierdzeń matematycznych. W tym celu organizuje on siatkę n informatorów stosując następującą zasadę: dla dowolnych dwóch różnych informatorów pierwszy przekazuje informacje drugiemu albo drugi pierwszemu. Udowodnij, że pewien informator będzie mógł otrzymywać informacje od pozostałych bezpośrednio lub z udziałem tylko jednego pośrednika. (Nie wymagamy, aby pośrednik był zawsze ten sam!)

ZADANIA DODATKOWE

8. Za pomocą zasady indukcji wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są równości:

$$(a) \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3},$$

$$(d) \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n} \quad (n \geq 2),$$

$$(b) \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,$$

$$(e) \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2,$$

$$(c) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \sqrt{n+1} - 1,$$

$$(f) \sum_{k=1}^n k! \cdot k = (n+1)! - 1,$$

$$(g) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)},$$

9. Znajdź i udowodnij wzór na sumę pierwszych n liczb naturalnych, które przy dzieleniu przez 3 dają resztę 1.
10. Za pomocą zasady indukcji udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$(a) 6 \mid n^3 + 5n,$$

$$(c) 37 \mid 1000^n - 1,$$

$$(e) 19 \mid 7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n,$$

$$(b) 3 \mid 10^n + 4^n - 2,$$

$$(d) 41 \mid 5 \cdot 7^{2(n+1)} + 2^{3n},$$

$$(f) 10 \mid 2^{(2^{n+1})} - 6.$$

11. Udowodnij, że wśród obszarów na jakie dzieli płaszczyznę n prostych, jest co najwyżej $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ obszarów ograniczonych.
12. Z tablicy o wymiarach 2^n na 2^n usunięto jedno pole o wymiarach 1 na 1. Udowodnij, że pozostałą część tablicy można pokryć nie zachodzącymi na siebie płytkami w kształcie litery L, składającymi się z 3 kwadratów.
13. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $2^{(2^n)} - 1$ ma co najmniej n różnych dzielników pierwszych.