

## Nierówności

Poniżej  $a, b, c, d$  oznaczają liczby rzeczywiste.

- (1) jeśli  $a < b$  i  $b < c$ , to  $a < c$ ;
- (2) jeśli  $a < b$ , to  $a + c < b + c$  i  $a - c < b - c$ ;
- (3) jeśli  $a < b$  i  $c > 0$ , to  $ac < bc$  i  $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ ;
- (4) jeśli  $a < b$  i  $c < 0$ , to  $ac > bc$  i  $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ ;
- (5) jeśli  $a < b$  i  $c < d$ , to  $a + c < b + d$

**UWAGA: Nie jest prawdą, że jeśli  $a < b$  i  $c < d$ , to  $a - c < b - d$  !!!**

- (6) jeśli  $0 < a < b$  i  $0 < c < d$ , to  $ac < bd$ ;
- (7) jeśli  $0 < a < b$  i  $c < d < 0$ , to  $ad > bc$ ;

**UWAGA: Nie jest prawdą, że jeśli  $a < b$  i  $c < d$ , to  $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$  !!!**

- (8) jeśli  $a > b > 0$ , to  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ;
- (9) jeśli  $a \neq 0$ , to  $a^2 > 0$ ;
- (10) jeśli  $a > 0, b > 0$  i  $a^2 > b^2$ , to  $a > b$ ;
- (11) jeśli  $a > 0, b > 0$  i  $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ , to  $a > b$ .

1. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich  $a, b$  spełnione są nierówności:

$$\max(a, b) \geq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \geq \min(a, b).$$

Kiedy każda z tych nierówności staje się równością?

2. Niech  $x > 0$ . Wykaż, że  $x + \frac{1}{x} \geq 2$ . Kiedy zachodzi równość?
3. Udowodnij nierówności między średnimi arytmetyczną i geometryczną dla trzech i czterech liczb dodatnich:

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}, \quad \frac{a + b + c + d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}.$$

4. **Nierówność między średnią kwadratową i arytmetyczną.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb  $a_1, a_2, \dots, a_n$  zachodzi

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

5. Liczby  $a_1, a_2, \dots, a_n$  są dodatnie i ich iloczyn jest równy 1. Wykaż, że

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 2^n.$$

6. Wykaż, że dla liczb nieujemnych  $a, b, c$  spełniona jest nierówność

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc.$$

7. Załóżmy, że  $0 < a_1, a_2, \dots, a_n < 1$ . Udowodnij, że

$$a_1 a_2 \dots a_n \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{lub} \quad (1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n) \leq \frac{1}{2^n}.$$

8. Liczby  $a, b, c$  są rzeczywiste. Udowodnij, że wśród trzech liczb  $a - b^2, b - c^2, c - a^2$  przynajmniej jedna jest mniejsza lub równa  $\frac{1}{4}$ .
9. Agent Tajny (A.T.) pływa w środku kwadratowego basenu, Wrogi Agent (W.A.) stoi w jednym z rogów. Wrogi Agent nie umie pływać, ale biega 4 razy szybciej niż Agent Tajny pływa. Agent Tajny biega szybciej niż Wrogi Agent. Czy Agent Tajny może uciec Wrogowi Agentowi?

## ZADANIA DODATKOWE

10. Niech  $n$  będzie liczbą naturalną. Która z liczb jest większa:  $\sqrt{n} + \sqrt{n+2}$  czy  $2\sqrt{n+1}$ ?
11. Udowodnij, że dla dowolnych liczb  $a, b \geq 0$  zachodzi nierówność

$$\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2}} \geq \frac{a + b}{2}.$$

12. Wykaż, że jeśli  $0 \leq x \leq 1$  i  $0 \leq y \leq 1$ , to

$$\frac{x}{1 + y} + \frac{y}{1 + x} < 1.$$

13. Która z pięciu liczb  $a, b, c, d, e$  jest najmniejsza, a która największa, jeśli spełniają one nierówności

$$a + b < c + d, \quad b + c < d + e, \quad c + d < e + a, \quad d + e < a + b.$$

14. Liczby rzeczywiste  $a, b, c$  spełniają równości

$$a + b + c = 1 \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Udowodnij, że  $a \cdot b \cdot c \leq 0$ .

15. Wykaż, że dla liczb dodatnich  $a, b$  prawdziwe są nierówności

$$(a) \quad \frac{(a + \sqrt{ab})^2}{4} \geq \sqrt{a \cdot \frac{a+b}{2}}, \quad (b) \quad (a + b) \cdot \sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}.$$

16. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich  $a, b, c, d$  zachodzi nierówność

$$\frac{ab + ad + bc + cd}{a + b + c + d} \geq \frac{ab}{a + b} + \frac{cd}{c + d}.$$