

Wzory skróconego mnożenia II

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, & (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3, \\ a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2), & a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2), \\ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).\end{aligned}$$

1. Rozwiń potęgę.

$$(a) \left(2x + \frac{y}{2}\right)^3; \quad (b) (x^2y - z^3)^3; \quad (c) \left(x - 1 + \frac{1}{x}\right)^3.$$

2. Przedstaw wyrażenie w postaci sześcianu sumy lub różnicy dwóch wyrażeń.

$$\begin{aligned}(a) 8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3; & \quad (c) \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2y + 6xy^2 - 8y^3; \\ (b) x^3 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^5} - \frac{1}{x^9}; & \quad (d) x^6 - 3x^3 + 3 - \frac{1}{x^3}.\end{aligned}$$

3. Rozłóż wyrażenia na czynniki.

$$\begin{aligned}(a) x^3 - xy^2 + x^2y - y^3; & \quad (c) a^3 + b^3 + 3ab - 1; \\ (b) (x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3; & \quad (d) a^6 - 2a^3 + 1.\end{aligned}$$

4. Liczba $a = \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ jest całkowita. Wyznacz a .

5. Rozwiąż równania.

$$(a) x^3 + x = 10, \quad (b) x^3 + 3x^2 = 4, \quad (c) x^5 + x^2 = 4x^3 + 4.$$

6. Załóżmy, że $x + \frac{1}{x} = 3$. Oblicz $x^3 + \frac{1}{x^3}$, $x^5 + \frac{1}{x^5}$ i $x^9 + \frac{1}{x^9}$.

7. Załóżmy, że $x + y + z = a$, $xy + yz + zx = b$, $xyz = c$. Wyraż przez a, b, c wartości wyrażeń

$$\begin{aligned}(a) x^2 + y^2 + z^2, & \quad (c) x^3 + y^3 + z^3, \\ (b) \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}, & \quad (d) (x+y)(y+z)(z+x).\end{aligned}$$

8. Wykaż, że **nie istnieje** trójka liczb rzeczywistych a, b, c takich, że

$$a + b + c = 4, \quad ab + bc + ca = 2, \quad \text{oraz} \quad abc = 1.$$

9. Niech $a, b, c \in \mathbb{R}$. Wykaż, że $\sqrt[3]{a-b} + \sqrt[3]{b-c} + \sqrt[3]{c-a} \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczby a, b, c są parami różne.

ZADANIA DODATKOWE

10. Liczba $a = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ jest całkowita. Wyznacz a .

11. Załóżmy, że $x - \frac{1}{x} = -2$. Oblicz $x^2 + \frac{1}{x^2}$, $x^3 - \frac{1}{x^3}$, $x^4 + \frac{1}{x^4}$ i $x^5 - \frac{1}{x^5}$.

12. Załóżmy, że $x + y + z = a$, $xy + yz + zx = b$, $xyz = c$. Wyraż przez a, b, c wartości wyrażeń

$$(a) x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2, \quad (b) (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y).$$

13. Rozłóż wyrażenia na czynniki.

$$\begin{aligned}(a) 9a^3 - 6a^2 + 1; \\ (b) x^3 + xy^2 - x^2y - y^3; \\ (c) (a+2b-3c)^3 + (b+2c-3a)^3 + (c+2b-3a)^3; \\ (d) (x+y+z)^3 - (y+z-x)^3 - (z+x-y)^3 - (x+y-z)^3.\end{aligned}$$

14. Rozwiąż równania.

$$(a) x^3 + 2x + 33 = 0, \quad (b) x^3 + 12 = x^2, \quad (c) x^3 + x^2 + x + 6 = 0.$$

15. Znajdź wszystkie liczby pierwsze, które są sumami dwóch sześcianów liczb naturalnych.

16. Liczby całkowite k, l, m spełniają równość

$$(k-l)^2 + (l-m)^2 + (m-k)^2 = klm.$$

Wykaż, że liczba $k^3 + l^3 + m^3$ jest podzielna przez $k + l + m + 6$.

17. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ liczba $n^{12} + 64$ jest iloczynem **czterech różnych** liczb naturalnych większych od 1.