

Wzory skróconego mnożenia I

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$$

1. Za pomocą wzorów na kwadrat sumy lub różnicy oblicz 19^2 , 52^2 , 195^2 , 107^2 , 999^2 .
2. Za pomocą wzoru na różnicę kwadratów oblicz iloczyny $18 \cdot 22$, $53 \cdot 47$, $495 \cdot 505$.
3. Zapisz wyrażenia jako kwadraty.

$$(a) p^2 + 6p + 9 \quad (b) 9x^2 - 2xy + \frac{y^2}{9} \quad (c) 2a^4 - 4\frac{a^2}{\sqrt{b}} + \frac{2}{b} \quad (d) ab + 2 + \frac{1}{ab}$$

4. Rozłóż wyrażenia na czynniki.

$$(a) 4x^2 - y^2 \quad (b) a^4 + 4b^4 \quad (c) x^2 + 4xy + 3y^2 \quad (d) a^{12} - 4b^{12} + 4a^8b^4 - a^4b^8$$

5. Rozwiąż równania.

$$(a) x^2 - 2x = 3 \quad (b) x^2 + x = 2, \quad (c) x^2 + \sqrt{2}x = 4, \quad (d) 4x^2 - 2x = \frac{3}{4}$$

6. Każda z liczb całkowitych a , b jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych. Wykaż, że liczba $a \cdot b$ też jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych.

7. Uprość sumy.

$$(a) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \quad (b) \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}$$

8. Udowodnij, że każda liczba naturalna postaci $a^4 + 3$, gdzie $a \in \mathbb{N}$ i $a > 1$, jest sumą trzech kwadratów liczb naturalnych.

9. Wyznacz wszystkie trójki x, y, z liczb rzeczywistych spełniających równanie

$$\sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2} = \frac{x+y+z}{2}.$$

10. Rozwiąż układy równań

$$(a) \begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2yz = 100 \\ 2xy - z^2 = 100 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} xy + xz = 8 - x^2 \\ xy + yz = 12 - y^2 \\ yz + zx = -4 - z^2 \end{cases}$$

ZADANIA DODATKOWE

11. Rozwiąż równania.

$$(a) \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{x} = 8 \quad (b) 4x^2 - 2x = \frac{3}{4} \quad (c) (x^2 - x)^2 = 9$$

12. Każda z liczb całkowitych a , b jest różnicą kwadratów liczb całkowitych. Czy liczba $a \cdot b$ też jest różnicą kwadratów liczb całkowitych?

13. Liczba rzeczywista x spełnia zależność $x + \frac{1}{x} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Oblicz wartości wyrażeń $x^2 + \frac{1}{x^2}$ i $x^4 + \frac{1}{x^4}$.

14. Znajdź wszystkie liczby rzeczywiste x, y, z , dla których zachodzi równość

$$(x - y + z)^2 = x^2 - y^2 + z^2.$$

15. Uprość sumy.

$$(a) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+2}} \quad (b) \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}} \quad (c) \sum_{k=1}^n \frac{4k}{4k^4 + 1}$$

16. Rozwiąż układy równań.

$$(a) \begin{cases} (x+y) \cdot z + x^2 = -3 \\ (y+z) \cdot x + y^2 = 0 \\ (z+x) \cdot y + z^2 = 3 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 2y^2 + 4z^2 - 4yz + 2y + 1 = 0 \\ 3z^2 - 6z + 3 = x^2 \end{cases}$$

17. Rozwiąż układ równań.

$$\begin{cases} x^2 + 2yz + 5x = 2 \\ y^2 + 2zx + 5y = 2 \\ z^2 + 2xy + 5z = 2 \end{cases}$$