

Zbiory i kwantyfikatory

Suma zbiorów: $A \cup B$; **przecięcie** (część wspólna, iloczyn) zbiorów: $A \cap B$, **różnica** zbiorów: $A \setminus B$. Zbiór pusty oznaczamy $\emptyset$.

Zapis $x \in A$ odczytujemy jako x jest elementem (należy do) zbioru A , $x \notin A$ jako x nie jest elementem (nie należy do) zbioru A .

Jeśli A i B to zbiory, to zapis $A \subset B$ oznacza, że A jest podzbiorem B

Dopełnienie zbioru. Jeżeli $A \subset \Omega$, to zbiór $A' = \Omega \setminus A$ nazywamy *dopełnieniem* zbioru A (w zbiorze Ω). Na przykład, dopełnieniem zbioru liczb wymiernych w zbiorze liczb rzeczywistych jest zbiór liczb niewymiernych.

Zachodzi równoważność $A \subset B \iff B' \subset A'$.

Różnica symetryczna zbiorów: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ – zbiór liczb naturalnych,
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ – zbiór liczb całkowitych,
- $\mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych, $\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych.

Kwantyfikator ogólny $\forall$. Zdania postaci *Dla każdego x ze zbioru X zachodzi $p(x)$* , zapisujemy następująco: $\forall_{x \in X} p(x)$. Np. zdanie *Dla każdej liczby naturalnej x prawdziwa jest nierówność $x > \frac{1}{2}$* można zapisać jako $\forall_{x \in \mathbb{N}} x > \frac{1}{2}$.

Kwantyfikator szczegółowy $\exists$. Zdania postaci *Istnieje x należące do zbioru X , dla którego zachodzi $p(x)$* , np. zdanie *Istnieje liczba naturalna x taka, że $x > 2025$* , można zapisać jako $\exists_{x \in \mathbb{N}} x > 2025$.

Jeżeli dwa kwantyfikatory ogólne lub dwa kwantyfikatory szczegółowe występują jeden po drugim, można zmienić ich kolejność, np.

$$\left(\forall_{x \in \mathbb{R}} \forall_{n \in \mathbb{N}} x > 1 \Rightarrow x^n > 1 \right) \iff \left(\forall_{n \in \mathbb{N}} \forall_{x \in \mathbb{R}} x > 1 \Rightarrow x^n > 1 \right)$$

$$\left(\exists_{x \in \mathbb{R}} \exists_{n \in \mathbb{N}} x^2 = n + 1 \wedge x > n \right) \iff \left(\exists_{n \in \mathbb{N}} \exists_{x \in \mathbb{R}} x^2 = n + 1 \wedge x > n \right).$$

Nie można zmienić kolejności kwantyfikatora ogólnego i szczególnego. Poniższe dwa zdania **nie są** równoważne:

$$(i) \forall_{x \in \mathbb{R}} \exists_{n \in \mathbb{N}} x < n, \quad (ii) \exists_{n \in \mathbb{N}} \forall_{x \in \mathbb{R}} x < n.$$

Zawsze zachodzi implikacja $\left(\exists_{x \in X} \forall_{y \in Y} p(x, y) \right) \Rightarrow \left(\forall_{y \in Y} \exists_{x \in X} p(x, y) \right)$.

Prawa de Morgana: Jeżeli Ω jest zbiorem, a $p(x)$ to zdanie logiczne, którego wartość zależy od elementu $x \in \Omega$, to

$$(i) \sim \left(\forall_{x \in \Omega} p(x) \right) \iff \exists_{x \in \Omega} \sim p(x), \quad (ii) \sim \left(\exists_{x \in \Omega} p(x) \right) \iff \forall_{x \in \Omega} \sim p(x).$$

1. Zapisz różnicę symetryczną $A \Delta B$ dwóch zbiorów $A, B \subset \Omega$ za pomocą operacji dopełnienia, sumy i przecięcia zbiorów.
2. Udowodnij *prawa de Morgana* dla podzbiorów $A, B, C \subset \Omega$:
(a) $(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$, (b) $(A \cap B \cap C)' = A' \cup B' \cup C'$.
3. Niech $A, B \subset \Omega$. Zaznacz na diagramie Venna zbiór elementów $x \in \Omega$, dla których prawdziwe jest zdanie
(a) $x \in A \iff x \in B$, (b) $x \in A \Rightarrow x \in B$, (c) $x \in A \Rightarrow x \in B' \cap A$.
4. A, B, C oznaczają zbiory. Udowodnij następujące związki:
(a) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$, (b) $A \cap B = \emptyset \iff A \cup B = A \Delta B$,
5. A, B, C, D, E to zbiory. Wykaż, że $A \Delta E \subset (A \Delta B) \cup (B \Delta C) \cup (C \Delta D) \cup (D \Delta E)$.
6. Zapisz zaprzeczenia poniższych zdań z kwantyfikаторami.

$$(a) \forall_{n \in \mathbb{N}} 2 \mid n^2 + n^5 \quad (c) \forall_{x \in \mathbb{R}} \exists_{n \in \mathbb{N}} x \neq 0 \Rightarrow x^2 > n$$

$$(b) \exists_{n \in \mathbb{N}} n^n = 16\,777\,216 \quad (d) \exists_{n \in \mathbb{N}} \forall_{x > 0} \exists_{k \in \mathbb{N}} \sqrt[k]{x} < n$$

Czy potrafisz rozstrzygnąć czy prawdziwe jest zdanie, czy jego zaprzeczenie?

7. Zapisz za pomocą kwantyfikаторów i działań logicznych definicję *liczby pierwszej*.

ZADANIA DODATKOWE

8. A, B, C, D, E to zbiory. Wykaż, że $A \Delta E \subset (A \Delta B) \cup (B \Delta C) \cup (C \Delta D) \cup (D \Delta E)$.
9. $A_1, A_2, \dots, A_n$ są podzbiarami zbioru Ω . Stosując rachunek zdań i kwantyfikatory udowodnij *prawa de Morgana* dla zbiorów:
(i) $(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)' = A_1' \cap A_2' \cap \dots \cap A_n'$
(ii) $(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)' = A_1' \cup A_2' \cup \dots \cup A_n'$
10. Dane są zbiory A, B, C, D . Udowodnij, że zbiór

$$X = (A \Delta (B \cup C \cup D)) \cap (B \Delta (C \cup D \cup A)) \cap (C \Delta (D \cup A \cup B))$$

składa się z tych elementów, które należą do dokładnie jednego ze zbiorów A, B, C, D .

11. A, B, C oznaczają zbiory. Udowodnij następujące związki:
(a) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$ (c) $A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$,
(b) $A \cup B = A \Delta B \Delta (A \cap B)$, (d) $A \Delta C \subset (A \Delta B) \cup (B \Delta C)$
12. Zbiory A, B, C, D spełniają równości $A \Delta B \Delta C = B \Delta C \Delta D = C \Delta D \Delta A = D \Delta A \Delta B$. Udowodnij, że $A = B = C = D$.
13. Zapisz zaprzeczenia poniższych zdań z kwantyfikаторami.
(a) $\exists_{x \in \mathbb{R}} \forall_{n \in \mathbb{Z}} x > 0 \wedge x < n^2 - n + \frac{1}{20}$
(b) $\forall_{k \in \mathbb{N}} \exists_{x > 0} \forall_{n \in \mathbb{Z}_+} (n + \frac{1}{100})^k \geq xn$
(c) $\exists_{q \in \mathbb{Q}} \forall_{x \in \mathbb{R}} \forall_{k \in \mathbb{Z}} q = xk \Rightarrow q = x \vee q = n$