

Elementy logiki

Zmienna logiczna może przyjmować wartość *prawda* (1) lub *falsz* (0).

Wyrażenie logiczne składa się ze zmiennych logicznych i operacji logicznych przedstawionych w tabelce poniżej. Wyrażenie logiczne również może przyjmować wartość *prawda* lub *falsz*, w zależności od wartości zmiennych logicznych, które w nim występują.

Operacje logiczne:

		negacja <i>nie p</i>	koniunkcja <i>p i q</i>	alternatywa <i>p lub q</i>	implikacja <i>z p wynika q</i>	równoważność <i>p wtw., gdy q</i>
<i>p</i>	<i>q</i>	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \iff q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Kolejność wykonywania operacji w wyrażeniach złożonych jest taka jak kolejność odpowiednich kolumn w tabelce. Kolejność operacji można zmienić wstawiając w odpowiednich miejscach nawiasy. Nawiasów można także używać, aby poprawić czytelność wyrażen. Nawiasów należy użyć w wyrażeniach niejednoznacznych z implikacją postaci $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$, $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$, itp.

Tautologią nazywamy wyrażenie logiczne, które przyjmuje wartość *prawda* niezależnie od wartości występujących w nim zmiennych logicznych. Przykłady tautologii to

- prawo podwójnego przeczenia*: $\sim (\sim p) \iff p$,
- prawa przemienności alternatywy*: $(p \vee q) \iff (q \vee p)$,

1. Sporządź tabelkę wartości dla wyrażen logicznych
(a) $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$, (b) $((p \wedge q) \vee (\sim p)) \Rightarrow q$.
2. Sprawdź, że następujące wyrażenia logiczne są tautologiami:
(a) *Prawo wyłączanego środka*: $p \vee \sim p$,
(b) *Pierwsze prawo de Morgana*: $\sim (p \wedge q) \iff ((\sim p) \vee (\sim q))$,
(c) *Prawo negacji implikacji*: $\sim (p \Rightarrow q) \iff p \wedge \sim q$,
3. Które z dwuargumentowych operacji logicznych są (a) przemienne, (b) łączne?
4. Wykaż, że koniunkcja jest rozdzielna względem alternatywy.
5. Które dwuargumentowe operacje logiczne, poza implikacją, są przechodnie?
6. Zapisz implikację i równoważność tylko za pomocą koniunkcji i negacji.
7. Zapisz zaprzeczenia poniższych zdań dotyczących liczby całkowitej *a*:
(a) $-10 < a \leq 2019$, (b) $3 \mid a \vee 5 \nmid a$, (c) $x = 10 \vee x > 5$.

8. Na wyspie mieszkają tylko rycerze i oszuści. Rycerze zawsze mówią prawdę, oszuści zawsze kłamią. Podróżnik napotkał trzech mieszkańców wyspy i dwóch z nich zapytał, ilu rycerzy mu towarzyszy. Pierwszy odpowiedział, że ani jeden, drugi, że tylko jeden. Który z napotkanych mieszkańców jest rycerzem, a który oszustem?
9. Agent Tajny ma dwóch informatorów. Każdy informator albo zawsze kłamie, albo zawsze mówi prawdę. Każdemu z informatorów Agent Tajny zadał dwa pytania: (1) *Czy ten drugi informator jest kłamcą?* i (2) *Czy, jeśli ty jesteś kłamcą, to drugi informator nie jest kłamcą?* Czy na podstawie uzyskanych odpowiedzi Agent Tajny może stwierdzić, który z informatorów mówi prawdę, a który kłamie? (Jest możliwe, że obaj kłamią lub obaj mówią prawdę.)

ZADANIA DODATKOWE

10. Udowodnij poniższe tautologie
(a) *Prawo odrywania*: $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$,
(b) *Drugie prawo de Morgana*: $\sim (p \vee q) \iff ((\sim p) \wedge (\sim q))$,
(c) *Przechodność implikacji*: $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.
11. Sporządź tabelki wartości poniższych wyrażen logicznych. Które z tych wyrażen są tautologiami?
(a) $(p \wedge q) \vee (q \Rightarrow p)$,
(b) $((p \vee q) \wedge r) \iff ((p \wedge r) \vee (q \wedge r))$,
(c) $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \iff ((p \Rightarrow q) \Rightarrow r)$,
(d) $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \iff (q \Rightarrow (p \Rightarrow r))$.
12. Wykaż, że alternatywa jest rozdzielna względem koniunkcji.
13. Zapisz alternatywę tylko za pomocą koniunkcji i negacji.
14. Udowodnij, że implikacji nie da się zapisać tylko za pomocą alternatywy i koniunkcji.
15. W 100-kartkowym zeszycie na 1. kartce jest napisane zdanie *W tym zeszycie dokładnie 1 zdanie jest fałszywe.*, na 2. kartce jest napisane zdanie *W tym zeszycie dokładnie 2 zdanie są fałszywe.*, itd, aż do ostatniej kartki, na której jest napisane zdanie *W tym zeszycie dokładnie 100 zdań jest fałszywych.* Czy wśród tych zdań są zdania prawdziwe. Jeśl tak, to które? (Zakładamy, że w zeszycie nie zapisano żadnych innych zdań).
16. W sądowej sprawie o kradzież konia jest 3 podejrzanych: A, B i C. Wiadomo, że dokładnie jeden z nich ukradł konia. B zeznał, że konia ukradł C. Zeznań A i C nie znamy. Ustalono jednak, że tylko jeden z podejrzanych zeznał prawdę i że to on ukradł konia. Kto ukradł konia?
17. O liczbach *a, b, c, d, e* wiadomo, że spełniają wszystkie 4 warunki poniżej:
(i) $(e > a) \Rightarrow ((e > b) \vee (e < c))$, (iii) $((e < d) \wedge (e > a)) \Rightarrow (e \geq c)$,
(ii) $(e \leq b) \Rightarrow (e < d)$, (iv) $((e < d) \wedge (e \leq b)) \Rightarrow (e > a)$.

Która z liczb jest większa: *e* czy *b*?