

Wprowadzenie

Umawiamy się, że *liczby naturalne* to liczby całkowite dodatnie.

1. Czy istnieje wielościan o 7 krawędziach?
2. Liczby a i b są naturalne. Która z liczb jest większa, $a^a \cdot b^b$ czy $a^b \cdot b^a$?
3. Jeśli liczbę dwucyfrową podzielimy przez sumę jej cyfr, to otrzymamy 6 i resztę 3. Jeśli zaś podzielimy tę liczbę przez sumę cyfr powiększoną o 2, to otrzymamy 5 i resztę 5. O jaką liczbę chodzi?
4. Liczbę naturalną n zapisano w pozycyjnym systemie liczbowym o podstawie a jako 1111. Udowodnij, że n nie jest sześcianiem liczby naturalnej. Czy n może być kwadratem liczby naturalnej?
5. Każda osoba na świecie uściśliła dłoń pewnej liczbie innych osób. Udowodnij, że liczba osób, które uściśliły dłoń nieparzystej liczbie osób, jest parzysta.
6. Dane są liczby x, y, z takie, że $xyz = 1$. Znajdź wartość sumy

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx}.$$

7. Udowodnij, że

$$\frac{9}{100} < \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{10}.$$

8. Udowodnij, że jeżeli

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1,$$

to

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0.$$

9. Liczby a, b, c są dodatnie i $a < b + c$. Udowodnij, że

$$\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}.$$

10. Na ekranie komputera jest wyświetlana pewna liczba całkowita większa od 1. Po minucie do wyświetlonej liczby dodawany jest jej największy dzielnik pierwszy, a po następnej minucie od nowej wyświetlonej liczby odejmowany jest jej największy dzielnik pierwszy. Wykaż, że po pewnym czasie na ekranie będą wyświetlane na zmianę te same dwie liczby.