Imię i nazwisko: Numer albumu:

Geometria z algebrą liniową (Informatyka)

29-11-2019 – 1. kolokwium – część teoretyczna

Maksymalny czas przewidziany na część teoretyczną to pierwsze 40 minut kolokwium. Po tym czasie arkusze z odpowiedziami zostaną zebrane. Odpowiedzi należy pisać **na arkuszu z pytaniami**.

W każdym zadaniu należy udzielać odpowiedzi **TAK** lub **NIE**, przy czym

- nawet jedna niepoprawna odpowiedź oznacza **0 pkt.** za całe zadanie, a w innym przypadku:
- dokładnie jedna poprawna odpowiedź to **1 pkt.** za całe zadanie,
- dokładnie dwie poprawne odpowiedzi to **2 pkt.** za całe zadanie,
- 3 poprawne odpowiedzi to **3 pkt.** za całe zadanie.

---

1. Istnieje grupa $(G, \diamond, e)$, która

- [ ] ma dokładnie dwa elementy i nie jest abelowa;
- [ ] ma dokładnie cztery elementy i jest abelowa;
- [ ] ma nieskończenie wiele elementów i nie jest abelowa.

---

2. Dla dowolnych liczb zespolonych $z, w \neq 0$

- [ ] jeśli $z^3 = w^3$, to $z = w$;
- [ ] jeśli $z^{17} = w^{17}$, to $\dfrac{z}{w} = \dfrac{\overline{w}}{\overline{z}}$;
- [ ] jeśli $\operatorname{Im}(\overline{z}^{17} w^{19}) = 0$, to $\operatorname{Im}(z^{17} \overline{w}^{19}) = 0$.

---

3. Dane są dwie macierze A, B takie, że są określone iloczyny AB i BA. Wynika z tego, że

- [ ] jest określona suma $AB + BA$;
- [ ] jest określona suma $AB + A^T B^T$;
- [ ] jest określona suma $AB + B^T A^T$;

---

4. Który z poniższych zbiorów jest podprzestrzenią liniową w przestrzeni liniowej $\mathbb{C}^{6,6}$ nad ciałem $\mathbb{C}$?

- [ ] $\{A \in \mathbb{C}^{6,6} : A^2 = I_6\}$;
- [ ] $\{A \in \mathbb{C}^{6,6} : A = -A^H\}$;
- [ ] $\left\{A \in \mathbb{C}^{6,6} : \forall_{B \in \mathbb{C}^{6,6}}\ AB = BA\right\}$.

---

5. Zbiór U jest podprzestrzenią liniową w przestrzeni liniowej X nad ciałem $\mathbb{K}$ oraz $\dim X = 5$. Wynika z tego, że

- [ ] istnieją wektory $x_1, x_2, x_3, x_4 \in X$ takie, że $U = \operatorname{span}(x_1, x_2, x_3, x_4)$;
- [ ] istnieją wektory $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in X$ takie, że $U = \operatorname{span}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$;
- [ ] jeśli istnieją wektory $x_1, x_2, x_3, x_4 \in X$ takie, że $U = \operatorname{span}(x_1, x_2, x_3, x_4)$, to $U \neq X$.

Geometria z algebrą liniową (Informatyka)

29-11-2019 – 1. kolokwium – zadania

Każde zadanie należy rozwiązywać na oddzielnej kartce. Każdą kartkę proszę podpisać **na górze** imieniem, nazwiskiem, i numerem albumu.

Każde zadanie będzie oceniane w skali 0 - 10. Na ocenę mają wpływ zarówno poprawność odpowiedzi jak i uzasadnienia formułowanych tez. W przypadku korzystania ze stwierdzeń, które nie zostały podane na ćwiczeniach, wykładzie lub w rozdziałach 1 - 8 skryptu, należy podać ich dowód.

---

1. Znajdź wszystkie liczby zespolone z spełniające równanie

$$|z|^4 = (\overline{z} + i)^4 .$$

2. Wyznacz wszystkie macierze $X \in \mathbb{R}^{2,3}$ takie, że

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} .$$

3. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$ nad ciałem $\mathbb{R}$ dane są podprzestrzenie liniowe

$$U = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \\ -12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix} \right),$$

$$W = \left\{ [x_1, x_2, x_3, x_4]^T \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \right\} .$$

(a) Wyznacz bazy podprzestrzeni U i W.

(b) Ile jest różnych podprzestrzeni liniowych $V \subset \mathbb{R}^4$ takich, że $U \subseteq V \subseteq W$? Uzasadnij odpowiedź.

4. Dany jest wielomian $P \in \mathbb{C}[z]$:

$$P(z) = (z^{200} + 1)(z^{80} - 1).$$

(a) Wyznacz liczbę **różnych** pierwiastków zespolonych wielomianu P.

(b) Oblicz iloczyn wszystkich **różnych** pierwiastków zespolonych wielomianu P.

Imię i nazwisko: Numer albumu:

Geometria z algebrą liniową (Informatyka)

09-01-2020 – 2. kolokwium – część teoretyczna

Maksymalny czas przewidziany na część teoretyczną to pierwsze 40 minut kolokwium. Po tym czasie arkusze z odpowiedziami zostaną zebrane. Odpowiedzi należy pisać **na arkuszu z pytaniami**.

W każdym zadaniu należy udzielać odpowiedzi **TAK** lub **NIE**, przy czym

- nawet jedna niepoprawna odpowiedź oznacza **0 pkt.** za całe zadanie, a w innym przypadku:
- dokładnie jedna poprawna odpowiedź to **1 pkt.** za całe zadanie,
- dokładnie dwie poprawne odpowiedzi to **2 pkt.** za całe zadanie,
- 3 poprawne odpowiedzi to **3 pkt.** za całe zadanie.

---

1. X jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{C}$ wymiaru 10 i $U, V \subset X$ są podprzestrzeniami liniowymi takimi, że $\dim U = \dim V = 6$. Wówczas

- [ ] $X = U + V$;
- [ ] $\dim(U \cap V) \geqslant 2$;
- [ ] jeżeli $\dim(U \cap V) = 4$, to $\dim(U + V) = 8$.

---

2. Dana jest macierz $A \in \mathbb{C}^{5,7}$ taka, że $\operatorname{rank}(A^T) = 4$. Wynika z tego, że

- [ ] $\dim(\ker A) = 2$;
- [ ] $\dim(\ker A) = 3$;
- [ ] $\dim(\ker A^T) = 2$.

---

3. Macierz $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy

- [ ] $\forall_{\vec{x} \in \mathbb{R}^n} \ (A\vec{x} = 0 \ \Rightarrow \ \vec{x} = 0)$;
- [ ] $\forall_{\vec{y} \in \mathbb{R}^n} \ \exists_{\vec{x} \in \mathbb{R}^n} \ A\vec{x} = \vec{y}$;
- [ ] $\forall_{B \in \mathbb{R}^{n,n}} \ \ker B = \ker(AB)$;

---

4. Układ 3 rzeczywistych równań liniowych z 5 niewiadomymi **nie** może być

- [ ] sprzeczny;
- [ ] niesprzeczny;
- [ ] oznaczony.

---

5. X i Y są przestrzeniami liniowymi nad ciałem $\mathbb{R}$, $\dim X = 10$, $\dim Y = 8$ i $f \in L(X, Y)$. Wynika z tego, że

- [ ] f nie jest monomorfizmem;
- [ ] f nie jest epimorfizmem;
- [ ] jeżeli $\dim(\ker f) = 2$, to f jest epimorfizmem.

Geometria z algebrą liniową (Informatyka)

09-01-2020 – 2. kolokwium – zadania

Każde zadanie należy rozwiązywać na oddzielnej kartce. Każdą kartkę proszę podpisać **na górze** imieniem, nazwiskiem i numerem albumu.

Każde zadanie będzie oceniane w skali 0 - 10. Na ocenę mają wpływ zarówno poprawność odpowiedzi jak i uzasadnienia formułowanych tez. W przypadku korzystania ze stwierdzeń, które nie zostały podane na ćwiczeniach, wykładzie lub w rozdziałach 1 - 8, 10 skryptu, należy podać ich dowód.

---

1. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}[x]_3$ nad ciałem $\mathbb{R}$ dane są podprzestrzenie liniowe

$$U = \operatorname{span}(1, (1-x)^2), \qquad \text{oraz} \qquad V_r = \{p \in \mathbb{R}[x]_3 : p(0) = p(r) = 0\},$$

gdzie $r \in \mathbb{R}$ jest ustaloną liczbą. Wyznacz wszystkie wartości r takie, że $\mathbb{R}[x]_3 = U \oplus V_r$.

2. Niech $n \geqslant 3$ i $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Oblicz wyznacznik macierzy

$$A = \begin{bmatrix} a_1^2 & (a_1+1)^2 & (a_1+2)^2 & \ldots & (a_1+n-1)^2 \\ a_2^2 & (a_2+1)^2 & (a_2+2)^2 & \ldots & (a_2+n-1)^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^2 & (a_n+1)^2 & (a_n+2)^2 & \ldots & (a_n+n-1)^2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n,n}.$$

Rozstrzygnij dla jakich $n \geqslant 3$ i $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ macierz A jest nieosobliwa.

3. Niech $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ i odwzorowanie $f : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^{2,2}$ jest dane wzorem

$$f(A) = M \cdot \begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix}, \qquad \text{dla } A \in \mathbb{R}^{2,2}.$$

(a) Wykaż, że $f \in L(\mathbb{R}^{2,2}, \mathbb{R}^{2,2})$.

(b) Zapisz macierz przekształcenia f w bazie $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$ przestrzeni $\mathbb{R}^{2,2}$.

(c) Wyznacz bazy przestrzeni $\ker f$ oraz $\operatorname{im} f$.

4. Dla danej macierzy $B \in \mathbb{R}^{2,4}$ rozważamy przekształcenie liniowe $F_B \in L(\mathbb{R}^{2,2}, \mathbb{R}^{2,2})$ dane wzorem

$$F_B(A) = B \cdot \begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix}, \qquad \text{dla } A \in \mathbb{R}^{2,2}.$$

Udowodnij, że przekształcenie F_B jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathbb{R}^4 = \ker B \oplus \operatorname{span}([1,0,1,0]^T, [0,1,0,1]^T).$$

Imię i nazwisko: Numer albumu:

Egzamin z GAL-u (Informatyka) – 1. termin

28/01/2020

Część teoretyczna I

Instrukcja: Odpowiedzi należy pisać **na arkuszu z pytaniami**.

W zadaniach 1-10 **należy udzielać odpowiedzi *TAK* lub *NIE***, przy czym

- nawet jedna niepoprawna odpowiedź oznacza 0 pkt. za całe zadanie, a w innym przypadku:
- dokładnie jedna poprawna odpowiedź to 1 pkt za całe zadanie,
- dokładnie dwie poprawne odpowiedzi to 2 pkt za całe zadanie
- 3 poprawne odpowiedzi to 3 punktu za całe zadanie,
- brak odpowiedzi nie jest traktowany jako niepoprawna odpowiedź.

1. Dana jest liczba zespolona $a = 1 + i\sqrt{3}$. Wówczas

- [ ] istnieje liczba całkowita k taka, że $|a^k| = 1$;
- [ ] istnieje liczba całkowita k taka, że $|a^k| = \frac{1}{32}$;
- [ ] istnieje liczba całkowita k taka, że $a^k + \overline{a}^k = 0$.

2. Dany jest wielomian $p \in \mathbb{R}[x]$ stopnia 5 taki, że $p(-1) = p(i) = 0$. Wynika z tego, że

- [ ] p jest iloczynem 3 wielomianów dodatniego stopnia z $\mathbb{R}[x]$;
- [ ] p jest iloczynem 4 wielomianów dodatniego stopnia z $\mathbb{R}[x]$;
- [ ] p ma co najmniej 3 różne pierwiastki zespolone.

3. Który z podzbiorów jest podprzestrzenią liniową w przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^{2,3}$ nad ciałem $\mathbb{R}$?

- [ ] $\{A \in \mathbb{R}^{2,3} : \operatorname{rank} A \leqslant 2\}$;
- [ ] $\left\{A \in \mathbb{R}^{2,3} : AA^T = I_2\right\}$;
- [ ] $\left\{A \in \mathbb{R}^{2,3} : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot A^T = 0\right\}$.

4. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$ dana jest podprzestrzeń liniowa $V = \operatorname{span}([1,0,0,0]^T, [0,1,0,0]^T)$ i podprzestrzeń W taka, że $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$. Wówczas

- [ ] $W = \operatorname{span}\left([0,0,1,0]^T, [0,0,0,1]^T\right)$;
- [ ] jeśli $W = \operatorname{span}(\vec{a}, \vec{b})$, to układ $[1,0,0,0]^T, [0,1,0,0]^T, \vec{a}, \vec{b}$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^4$;
- [ ] jeśli $A \in \mathbb{R}^{4,4}$ i $\operatorname{im} A = V$, to $\ker(A^T) = \operatorname{span}\left([0,0,1,0]^T, [0,0,0,1]^T\right)$

5. Macierz $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy

- [ ] $\dim(\ker A) + \dim(\ker A^T) = 0$;
- [ ] $\dim(\ker A) + \dim(\operatorname{im} A^T) = n$;
- [ ] macierz A jest podobna do macierzy I_n;

6. X i Y są przestrzeniami liniowymi skończonego wymiaru nad ciałem $\mathbb{R}$ i przekształcenie liniowe $f \in L(X, Y)$ jest monomorfizmem. Wynika z tego, że

- [ ] $\dim X \leqslant \dim Y$
- [ ] jeśli wektory $x_1, x_2, x_3 \in X$ są liniowo niezależne, to wektory $f(x_1), f(x_1 + x_2 - x_3)$, $f(x_1) + f(x_2 + x_3)$ są liniowo niezależne;
- [ ] jeśli wektory $x_1, x_2, x_3 \in X$ są liniowo niezależne, to wektory $f(x_1), f(x_1 + x_2 + x_3)$, $f(x_1) - f(x_2 + x_3)$ są liniowo niezależne.

---

7. Które z podanych macierzy są podobne?

- [ ] $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;
- [ ] $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;
- [ ] $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

---

8. X jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$ wymiaru 3 i endomorfizm $f \in L(X)$ ma dokładnie dwie różne wartości własne, obie różne od 0. Wynika z tego, że

- [ ] f jest epimorfizmem;
- [ ] f jest diagonalizowalny;
- [ ] $f \circ f$ jest monomorfizmem.

---

9. Macierz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ jest

- [ ] dodatnio określona;
- [ ] nieujemnie określona;
- [ ] nieokreślona.

---

10. $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ jest przestrzenią euklidesową, $V \subset X$ jest podprzestrzenią liniową, $P_V \in L(X)$ oznacza rzut ortogonalny na podprzestrzeń V oraz $y \in V^{\perp}$. Wynika z tego, że

- [ ] jeśli $x \in X$, to $\langle P_V(x), y \rangle = 0$;
- [ ] $\operatorname{rank}(P_V) + \dim(V^{\perp}) = \dim X$;
- [ ] jeśli $x \in X \setminus \{0\}$ i $P_V(x) = 0$, to $\langle x, y \rangle \neq 0$.

Imię i nazwisko: Numer albumu:

Egzamin z GAL-u (Informatyka) – 1. termin

28/01/2020

Część teoretyczna II

1. (2 pkt) Podaj przykłady

(a) grupy abelowej mającej dokładnie 23 elementy:

(b) grupy nieabelowej mającej co najmniej 23 elementy:

2. (2 pkt) Niech $z, w \in \mathbb{C}$ Wykaż, że $|z + w| \leqslant |z| + |w|$.

3. (2 pkt) Zapisz w postaci trygonometrycznej wszystkie pierwiastki zespolone stopnia 4 z liczy zespolonej $2\sqrt{2}(1 - i)$.

4. (4 pkt.) Załóżmy, że X jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$, $x, x_1, \ldots, x_k \in X$ oraz układ $x_1, \ldots, x_k$ jest liniowo niezależny. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:

(i) $x \in \operatorname{span}(x_1, \ldots, x_k)$,

(ii) układ $x, x_1, \ldots, x_k$ jest liniowo zależny.

---

5. (2 pkt.) Podaj definicje obrazu i jądra macierzy $A \in \mathbb{K}^{n,n}$.

---

6. (3 pkt.) Dana jest macierz $A \in \mathbb{R}^{30,24}$ taka, że $\dim(\ker A^T) = 18$. Wówczas

$\dim(\ker A) =$ $\qquad$ $\dim(\operatorname{im} A) =$ $\qquad$ $\det_{30}(AA^T) =$

Imię i nazwisko: Numer albumu:

Egzamin z GAL-u (Informatyka) – 1. termin

28/01/2020

Część teoretyczna III

1. (3 pkt.) Przekształcenie liniowe $f \in L(X, Y)$ jest izomorfizmem. Wykaż, że $f^{-1} \in L(Y, X)$.

2. (3 pkt.) Funkcjonały liniowe $f_1^*, f_2^*, f_3^* \in (\mathbb{R}[x]_2)^*$ tworzą bazę dualną do bazy $x^2 - 3$, $3x^2 - x + 2$, $2x^2 - 5x$ przestrzeni $\mathbb{R}[x]_2$. Zapisz funkcjonał $g^*(p) = p'(1)$ $(p \in \mathbb{R}[x]_2)$ jako kombinację liniową funkcjonałów f_1^*, f_2^*, f_3^*.

3. (3 pkt.) Wyznacz wartości własne macierzy $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -1 \\ 7 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

4. (4 pkt.) Podaj definicję ortogonalnego układu wektorów w przestrzeni z iloczynem skalarnym $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Udowodnij, że każdy ortogonalny układ wektorów jest liniowo niezależny.

5. (2 pkt.) W przestrzeni euklidesowej $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ dany jest układ ortonormalny u_1, u_2, u_3 oraz wektory $x = 2u_1 - 3u_2 + 4u_3$, $y = -2u_1 + u_2 - 2u_3$. Wówczas

$\langle 2x, 3y \rangle =$

$\|2x + 3y\| =$

Egzamin z GAL-u (Informatyka) – 1. termin 28/01/2020

Zadania

Każde zadanie należy rozwiązywać na oddzielnej kartce. Każdą kartkę proszę podpisać **WIELKIMI LITERAMI na górze** imieniem, nazwiskiem i numerem albumu.

Każde zadanie będzie oceniane w skali 0 - 15. Na ocenę mają wpływ zarówno poprawność odpowiedzi jak i uzasadnienia formułowanych tez. W przypadku korzystania ze stwierdzeń, które nie zostały podane na ćwiczeniach, wykładzie lub w skrypcie, należy podać ich dowód.

ZADANIE 1. Liczba zespolona $z \neq 0$ spełnia równość

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z + \frac{1}{z} + 1\right) = 1.$$

Dla danej liczby naturalnej $n > 1$ znajdź wartość wyrażenia

$$\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)\left(z^n + \frac{1}{z^n} + 1\right).$$

ZADANIE 2. Rozstrzygnij dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ układ równań liniowych

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 - x_4 = 1 \\ ax_1 + 4x_2 + ax_3 = -1 \\ ax_2 + 4x_3 + ax_4 = 1 \\ -x_1 + ax_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

jest (a) oznaczony, (b) niesprzeczny, (c) nieoznaczony.

ZADANIE 3. Endomorfizm $f \in L(\mathbb{R}^3)$ jest dany wzorem

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 - x_3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}, \quad \text{dla } \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

(a) (9 pkt.) Wykaż, że endomorfizm f jest diagonalizowalny. Znajdź bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, w której macierz endomorfizmu f jest diagonalna i wyznacz tę macierz.

(b) (6 pkt.) Wyznacz bazy obrazu i jądra dla endomorfizmów f oraz $f \circ f \circ f$.

ZADANIE 4.

(a) (2 pkt.) Wykaż, że dla dowolnych wektorów $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{C}^n$ funkcja $f^* : \mathbb{C}^{n,n} \to \mathbb{C}$ dana wzorem

$$f^*(A) = \vec{u}^T A \vec{v}, \qquad \text{dla } A \in \mathbb{C}^{n,n}$$

jest funkcjonałem liniowym na przestrzeni $\mathbb{C}^{n,n}$ nad ciałem $\mathbb{C}$.

(b) (4 pkt.) Wykaż, że jeśli $A \in \ker f^*$, to

$$\vec{v} \in \ker A \qquad \text{lub} \qquad \mathrm{im} A \cap \ker(\vec{u}^T) \neq \{0\}.$$

(c) (9 pkt.) Załóżmy, że wektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ tworzą bazę przestrzeni liniowej $\mathbb{C}^n$ nad ciałem $\mathbb{C}$. Udowodnij, że układ funkcjonałów

$$f^*_{i,j}(A) = \vec{u}_i^T A \vec{u}_j, \qquad \text{gdzie} \quad A \in \mathbb{C}^{n,n}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

jest bazą przestrzeni $(\mathbb{C}^{n,n})^*$.

Wskazówka: Funkcjonały z bazy dualnej do $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ można przedstawić jako macierze z $\mathbb{C}^{1,n}$.

ZADANIE 5. Odwzorowanie $\phi : \mathbb{R}[x]_3 \times \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}$ jest dane wzorem

$$\phi(p, q) = p(1)q'(-1) + p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p'(-1)q(1).$$

(a) (5 pkt.) Wykaż, że ϕ jest formą dwuliniową symetryczną na przestrzeni $\mathbb{R}[x]_3$.

(b) (10 pkt.) Rozstrzygnij, czy forma ϕ jest określona dodatnio, ujemnie, niedodatnio, nieujemnie, lub czy jest nieokreślona.

ZADANIE 6. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym ($\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^T \vec{y}$) dane są podprzestrzenie liniowe

$$X = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} : x_1 + x_4 = x_2 + x_3 = 0 \right\}, \quad Y = \mathrm{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

(a) (5 pkt.) Rozstrzygnij, czy sumy podprzestrzeni $X + Y$ i $X^\perp + Y$ są proste i czy są równe całej przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

(b) (5 pkt.) Znajdź bazy ortogonalne przestrzeni X i $X^\perp$.

(c) (5 pkt.) Oblicz rzuty ortogonalne wektora $[1, -1, 1, -1]^T$ na podprzestrzenie X, $X^\perp$ i $Y^\perp$.

Imię i nazwisko: Numer albumu:

Egzamin z GAL-u (Informatyka) – 2. termin

18/02/2020

Część teoretyczna I

Instrukcja: Odpowiedzi należy pisać **na arkuszu z pytaniami**.

W zadaniach 1-10 **należy udzielać odpowiedzi *TAK* lub *NIE***, przy czym

- nawet jedna niepoprawna odpowiedź oznacza 0 pkt. za całe zadanie, a w innym przypadku:
- dokładnie jedna poprawna odpowiedź to 1 pkt za całe zadanie,
- dokładnie dwie poprawne odpowiedzi to 2 pkt za całe zadanie
- 3 poprawne odpowiedzi to 3 punkty za całe zadanie,
- brak odpowiedzi nie jest traktowany jako niepoprawna odpowiedź.

1. Niech $(G, \diamond, e)$ będzie grupą, $a, b, c \in G$ oraz $a \diamond c = e$. Wynika z tego, że

- [ ] $a \diamond b = b \diamond a$;
- [ ] $(b \diamond c) \diamond (a \diamond b) = b \diamond b$;
- [ ] jeśli $c \diamond b = e$, to $b = a$.

2. Liczba zespolona $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ jest

- [ ] pierwiastkiem zespolonym z liczby 1;
- [ ] pierwiastkiem zespolonym z liczby $-i$;
- [ ] pierwiastkiem zespolonym z liczby $\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$.

3. X jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$ i wektory x_1, x_2, x_3, x_4 są liniowo niezależne. Wówczas

- [ ] $\dim X \geqslant 4$;
- [ ] wektory $x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4, x_4 + x_1$ są liniowo zależne;
- [ ] wektory $x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4, x_4 + x_1$ są liniowo niezależne.

4. X jest przestrzenią liniową wymiaru 10 i $V, W \subset X$ są podprzestrzeniami liniowymi takimi, że $X = V + W$. Wynika z tego, że

- [ ] $\dim V + \dim W = 10$;
- [ ] jeśli $V \cap W = \{0\}$, to $\dim V + \dim W = 10$;
- [ ] jeśli $\dim V + \dim W = 10$, to $V \cap W = \{0\}$.

5. Macierze $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ są nieosobliwe. Wynika z tego, że

- [ ] $\operatorname{im}(AB) = \mathbb{R}^n$;
- [ ] $\ker(A + B) = \{0\}$;
- [ ] $\operatorname{im} A = \operatorname{im} B$;

6. Niech $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ oraz $\operatorname{im} A = \operatorname{span}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k)$, gdzie $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_k \in \mathbb{R}^n$. Wówczas

- [ ] jeśli $k = n$ to macierz A jest nieosobliwa;
- [ ] jeśli $k < n$ to macierz A jest osobliwa;
- [ ] jeśli macierz A jest nieosobliwa, to $k = n$.

---

7. X i Y są przestrzeniami liniowymi skończonego wymiaru nad ciałem $\mathbb{R}$, $\dim X = 10$, $\dim Y = 12$ i $f \in L(X, Y)$. Wynika z tego, że

- [ ] $\dim(\operatorname{im} f) < \dim Y$;
- [ ] $\dim(\ker f) < \dim Y$;
- [ ] f nie jest monomorfizmem.

---

8. Macierze $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$ są podobne. Wynika z tego, że

- [ ] $\operatorname{im} A = \operatorname{im} B$;
- [ ] $\det_n(A + 3I_n) = \det_n(B + 3I_n)$;
- [ ] $\operatorname{rank}(A^2) = \operatorname{rank}(B^2)$.

---

9. Macierz symetryczna $A = [a_{i,j}]_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n,n}$ jest dodatnio określona. Wynika z tego, że

- [ ] $\det_n(A) > 0$;
- [ ] $a_{1,1} + a_{2,2} + \ldots + a_{n,n} > 0$;
- [ ] macierz A ma n różnych dodatnich wartości własnych.

---

10. $(A, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ jest przestrzenią euklidesową, $x, y \in X$ oraz $\|x\| = \|y\| = 1$. Wówczas

- [ ] $\langle x, y \rangle \leqslant 1$;
- [ ] jeśli $\langle x, y \rangle < 1$, to $\dim X \geqslant 2$;
- [ ] $\langle x, y \rangle \neq 0$.

Imię i nazwisko: Numer albumu:

Egzamin z GAL-u (Informatyka) – 2. termin

18/02/2020

Część teoretyczna II

1. (2 pkt) Czy zbiór liczb zespolonych $\{a + bi \in \mathbb{C} : a, b \in \mathbb{Z}, a^2 + b^2 \neq 0\}$ jest grupą z działaniem mnożenia liczb zespolonych? Uzasadnij odpowiedź.

2. (2 pkt) Zapisz w postaci trygonometrycznej wszystkie pierwiastki zespolone stopnia 5 z liczby -32.

3. (3 pkt) Niech $p \in \mathbb{R}[z]$ będzie wielomianem zmiennej zespolonej z o współczynnikach rzeczywistych i $p(z_0) = 0$ dla pewnej liczby zespolonej z_0. Wykaż, że $p(\overline{z_0}) = 0$.

4. (2 pkt.) Podaj definicje bazy i wymiaru przestrzeni liniowej X nad ciałem $\mathbb{K}$

5. (4 pkt.) Załóżmy, że X jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$ i $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:

(i) Układ $x_1, \ldots, x_n$ jest bazą przestrzeni X.

(ii) Dla każdego $x \in X$ istnieją jednoznacznie wyznaczone skalary $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ z ciała $\mathbb{K}$ takie, że $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$.

6. (2 pkt.) X jest przestrzenią liniową wymiaru 7, $U, V \subset X$ to podprzestrzenie liniowe takie, że $X = U + V$ oraz $\dim U = \dim V = 5$. Jakie wartości może przyjąć $\dim(U \cap V)$?

Imię i nazwisko: Numer albumu:

Egzamin z GAL-u (Informatyka) – 2. termin

18/02/2020

Część teoretyczna III

1. (4 pkt.) Załóżmy, że $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, $\dim \ker A = k$ i układ wektorów $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k \in \mathbb{K}^n$ jest bazą podprzestrzeni $\ker A$. Układ ten uzupełniamy wektorami $\vec{u}_{k+1}, \ldots, \vec{u}_n$ do bazy całej przestrzeni $\mathbb{K}^n$. Wykaż, że układ $n-k$ wektorów

$$\vec{y}_{k+1} = A\vec{u}_{k+1}, \quad \ldots, \quad \vec{y}_n = A\vec{u}_n \in \mathbb{K}^m$$

jest bazą podprzestrzeni $\operatorname{im} A$.

2. (4 pkt.) Wykaż, że niesprzeczny układ równań liniowych $A\vec{x} = \vec{b}$ jest oznaczony wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker A = \{0\}$.

3. (2 pkt.) Przekształcenie liniowe $f \in L(\mathbb{R}[x]_3, \mathbb{R}^3)$ spełnia warunki: $f(1+x) = 0$, $f(1+x^2) = f(1-x^2)$, $f(x^3) = [1,1,1]^T$. Wyznacz $f(1+x+x^2+x^3)$.

---

4. (2 pkt.) Rozstrzygnij, czy macierz symetryczna $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ jest dodatnio lub ujemnie określona. Uzasadnij odpowiedź.

---

5. (3 pkt.) Wyznacz wektory i wartości własne macierzy $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Egzamin z GAL-u (Informatyka) – 2. termin 18/02/2020

Zadania

Każde zadanie należy rozwiązywać na oddzielnej kartce. Każdą kartkę proszę podpisać **na górze** imieniem, nazwiskiem i numerem albumu.

Każde zadanie będzie oceniane w skali 0 - 15. Na ocenę mają wpływ zarówno poprawność odpowiedzi jak i uzasadnienia formułowanych tez. W przypadku korzystania ze stwierdzeń, które nie zostały podane na ćwiczeniach, wykładzie lub w skrypcie, należy podać ich dowód.

ZADANIE 1. Różne liczby zespolone z_1, z_2, z_3, z_4 są pierwiastkami wielomianu $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, przy czym

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1 \quad \text{oraz} \quad \mathrm{Im}(z_1 - z_2) = \mathrm{Im}(z_3 - z_4) = 0.$$

Udowodnij, że $a = c = 0$, $d = 1$ oraz $-2 < b < 2$.

ZADANIE 2. Rozstrzygnij dla jakich wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ układ równań liniowych

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = b \\ x_1 + ax_2 + ax_3 + ax_4 = 1 \\ ax_1 + ax_2 + ax_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -b \end{cases}$$

jest (a) oznaczony, (b) niesprzeczny, (c) nieoznaczony.

ZADANIE 3. Endomorfizm $F \in L(\mathbb{R}[x]_3)$ jest dany wzorem

$$F(p)(x) = p'(-1) + p'(0) \cdot x - p'(0) \cdot x^2 + p'(1) \cdot x^3, \qquad \text{gdzie } x \in \mathbb{R}.$$

(a) (8 pkt.) Wyznacz bazy obrazu i jądra endomorfizmu F.

(b) (7 pkt.) Rozstrzygnij, czy endomorfizmy F oraz $F \circ F$ są diagonalizowalne.

ZADANIE 4.

Dana jest macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}.$$

(a) (5 pkt.) Znajdź bazę podprzestrzeni $\mathrm{im}A \subset \mathbb{R}^4$ i uzupełnij ją do bazy całej przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

(b) (5 pkt.) Zapisz funkcjonał liniowy $g^* \in (\mathbb{R}^4)^*$ dany wzorem

$$g^*(\vec{x}) = [1, 1, 1, 1]\vec{x}, \qquad \text{gdzie } \vec{x} \in \mathbb{R}^4,$$

jako kombinację liniową funkcjonałów $f_1^*, f_2^*, f_3^*, f_4^* \in (\mathbb{R}^4)^*$, które tworzą bazę dualną do bazy przestrzeni $\mathbb{R}^4$ wyznaczonej w podpunkcie (a).

(c) (5 pkt.) Rozstrzygnij, czy $\mathbb{R}^4 = \mathrm{im}A \oplus \ker A$.

ZADANIE 5. Niech $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ to ustalony wektor. Odwzorowanie $\phi : \mathbb{R}^{m,n} \times \mathbb{R}^{m,n} \to \mathbb{R}$ jest dane wzorem

$$\phi(A, B) = \vec{u}^T A^T B \vec{u}, \qquad \text{gdzie } A, B \in \mathbb{R}^{m,n}.$$

(a) (5 pkt.) Wykaż, że ϕ jest formą dwuliniową symetryczną na przestrzeni $\mathbb{R}^{m,n}$.

(b) (5 pkt.) Udowodnij, że forma ϕ jest nieujemnie określona.

(c) (5 pkt.) Niech $A \in \mathbb{R}^{m,n}$. Wykaż, że $\phi(A, A) > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\vec{u} \notin \ker A$.

ZADANIE 6. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^5$ ze standardowym iloczynem skalarnym ($\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^T \vec{y}$) dana jest podprzestrzeń liniowa

$$V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 + x_3 = x_2 - x_3 + x_4 = x_3 + x_4 + x_5 = 0\},$$

gdzie $\vec{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T$.

(a) (8 pkt.) Znajdź bazę ortogonalną podprzestrzeni $V^\perp$.

(b) (7 pkt.) Oblicz rzuty ortogonalne wektora $\vec{w} = [3, -1, 1, 5, 3]^T$ na podprzestrzenie V i $V^\perp$.