Imię i nazwisko: Numer albumu:

Geometria z algebrą liniową (Informatyka)

22-11-2018 – 1. kolokwium – część teoretyczna

Maksymalny czas przewidziany na część teoretyczną to pierwsze 40 minut kolokwium. Po tym czasie arkusze z odpowiedziami zostaną zebrane. Odpowiedzi należy pisać **na arkuszu z pytaniami**.

W każdym zadaniu należy udzielać odpowiedzi **TAK** lub **NIE**, przy czym

- nawet jedna niepoprawna odpowiedź oznacza **0 pkt.** za całe zadanie, a w innym przypadku:
- dokładnie jedna poprawna odpowiedź to **1 pkt.** za całe zadanie,
- dokładnie dwie poprawne odpowiedzi to **2 pkt.** za całe zadanie,
- 3 poprawne odpowiedzi to **3 pkt.** za całe zadanie.

---

1. Liczby $u_0, u_1, \ldots, u_{2017}$ to różne zespolone pierwiastki z 1 stopnia 2018. Wówczas

- [ ] wśród liczb $u_0, u_1, \ldots, u_{2017}$ jest liczba o zerowej częsci rzeczywistej;
- [ ] wśród liczb $u_0, u_1, \ldots, u_{2017}$ jest liczba o zerowej częsci urojonej;
- [ ] liczby $u_0^2, u_1^2, \ldots, u_{2017}^2$ są wszystkie różne.

---

2. Wielomian $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ jest stopnia 4 i ma pierwiastek zespolony $-1+i$. Wynika z tego, że

- [ ] wielomian p ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste;
- [ ] wielomian p ma dwa różne pierwiastki zespolone;
- [ ] wielomian p ma trzy różne pierwiastki zespolone.

---

3. X jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$ i $x_1, x_2, \ldots, x_{10} \in X$. Wynika z tego, że

- [ ] jeżeli $x_{10} \in \operatorname{span}(x_1, x_2, \ldots, x_{10})$, to układ $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ jest liniowo zależny;
- [ ] jeżeli układ $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ jest liniowo zależny, to $x_{10} \in \operatorname{span}(x_1, x_2, \ldots, x_{10})$;
- [ ] jeżeli układ $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ jest liniowo niezależny, to $x_{10} \notin \operatorname{span}(x_1, x_2, \ldots, x_9)$.

---

4. Wymiar przestrzeni liniowej X jest równy 10. Wówczas

- [ ] dowolne 10 różnych niezerowych wektorów z przestrzeni X jest bazą tej przestrzeni;
- [ ] dowolna baza przestrzeni X składa się z 10 różnych niezerowych wektorów;
- [ ] jeżeli $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$ i $X = \operatorname{span}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, to $k \geqslant 10$.

---

5. X jest przestrzenią liniową i $Y, Z \subset X$ są podprzestrzeniami liniowymi. Wówczas

- [ ] $Y \cup Z$ jest podprzestrzenią liniową w X;
- [ ] $Y \cap Z$ jest podprzestrzenią liniową w X;
- [ ] $0 \in Y \cap Z$.

Geometria z algebrą liniową (Informatyka)

22-11-2018 – 1. kolokwium – zadania

Każde zadanie należy rozwiązywać na oddzielnej kartce. Każdą kartkę proszę podpisać **na górze** imieniem, nazwiskiem, i numerem albumu.

Każde zadanie będzie oceniane w skali 0 - 10. Na ocenę mają wpływ zarówno poprawność odpowiedzi jak i uzasadnienia formułowanych tez. W przypadku korzystania ze stwierdzeń, które nie zostały podane na ćwiczeniach, wykładzie lub w rozdziałach 1 - 5 skryptu, należy podać ich dowód.

---

1. W zbiorze $A = \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ wszystkich par uporządkowanych liczb wymiernych określono działanie dwuargumentowe

$$(a, b) * (c, d) = (a + c + 1, 2bd), \qquad a, b, c, d \in \mathbb{Q}.$$

(a) (2 pkt.) Wyznacz element neutralny $(u, v) \in A$ tego działania.

(b) (8 pkt.) Znajdź najmniejszy (w sensie inkluzji) podzbiór $B \subset A$ taki, że $(A \setminus B, *, (u, v))$ jest grupą abelową. (Należy uzasadnić zarówno, że znaleziony zbiór B jest najmniejszy, jak i to, że $(A \setminus B, *, (u, v))$ jest grupą abelową.)

2. Znajdź wszystkie liczby zespolone z spełniające równanie

$$(|z|^2 + i\overline{z})^2 = 2i.$$

3. Dla $n \geqslant 2$ dana jest macierz $A = [a_{i,j}]_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n,n}$, przy czym

- $a_{i,i} = a_{i,n+1-i} = 1$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$,
- $a_{i,j} = 0$ w pozostałych przypadkach,

tzn.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & 1 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 1 & \ldots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

(a) (5 pkt.) Wyznacz macierz A^k dla $k \in \mathbb{N}$.

(b) (5 pkt.) Dla każdego $k \in \mathbb{N}$ rozstrzygnij, czy macierz A^k jest nieosobliwa.

4. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$ nad ciałem $\mathbb{R}$ jest dana podprzestrzeń liniowa

$$V = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}\right).$$

(a) (7 pkt.) Wyznacz bazę podprzestrzeni V i uzupełnij ją do bazy całej przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

(b) (3 pkt.) Zbadaj, dla jakich $c \in \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ c \end{bmatrix} \in V.$$

Imię i nazwisko: Numer albumu:

Geometria z algebrą liniową (Informatyka)

10-01-2019 – 2. kolokwium – część teoretyczna

Maksymalny czas przewidziany na część teoretyczną to pierwsze 40 minut kolokwium. Po tym czasie arkusze z odpowiedziami zostaną zebrane. Odpowiedzi należy pisać **na arkuszu z pytaniami**.

W każdym zadaniu należy udzielać odpowiedzi **TAK** lub **NIE**, przy czym

- nawet jedna niepoprawna odpowiedź oznacza **0 pkt.** za całe zadanie, a w innym przypadku:
- dokładnie jedna poprawna odpowiedź to **1 pkt.** za całe zadanie,
- dokładnie dwie poprawne odpowiedzi to **2 pkt.** za całe zadanie,
- 3 poprawne odpowiedzi to **3 pkt.** za całe zadanie.

Brak odpowiedzi nie jest interpretowany jako niepoprawna odpowiedź.

1. W przestrzeni liniowej X wymiaru 15 dane są podprzestrzenie U i V takie, że $\dim U + \dim V = 15$. Wynika z tego, że

- [ ] $X = U \oplus V$;
- [ ] jeżeli $X = U + V$, to $U \cap V = \emptyset$;
- [ ] jeżeli $(U \cap V) \setminus \{0\} \neq \emptyset$, to $U + V \neq X$.

2. Niech $A \in \mathbb{C}^{7,4}$, $\vec{b} \in \mathbb{C}^7$ i załóżmy, że układ równań $A\vec{x} = \vec{b}$ jest oznaczony. Wynika z tego, że

- [ ] $\operatorname{rank}(A^T) = 4$;
- [ ] $\ker(A) = \{0\}$;
- [ ] $\ker(A^T) = \{0\}$.

3. Dane są dwie macierze $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ takie, że $\det_n(A) = 10$ i $\det_n(AB) = \det_n(A^2)$. Wynika z tego, że

- [ ] $AB = A^2$;
- [ ] macierz B^T jest odwracalna;
- [ ] $\det_n(BA^2) > \det_n(BA)$.

4. $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ jest przestrzenią euklidesową, $V \subset X$ jest podprzestrzenią liniową i $P_V(x)$ oznacza rzut ortogonalny wektora $x \in X$ na podprzestrzeń V. Wynika z tego, że

- [ ] jeżeli $P_V(x) = 0$ to $x = 0$;
- [ ] jeżeli $P_V(P_V(x)) = 0$, to $P_V(x) = 0$;
- [ ] jeżeli $P_V(P_V(x)) = x$, to $P_V(x) = x$.

5. Dane jest przekształcenie liniowe $F \in L(\mathbb{R}[x]_2, \mathbb{R}[x]_3)$. Wynika z tego, że

- [ ] $\dim(\operatorname{im} F) \leqslant 3$;
- [ ] $\operatorname{im} F \subset \mathbb{R}[x]_2$;
- [ ] jeżeli $\operatorname{im} F = \mathbb{R}[x]_2$, to $\ker F = \{0\}$.

Geometria z algebrą liniową (Informatyka)

10-01-2019 – 2. kolokwium – zadania

Każde zadanie należy rozwiązywać na oddzielnej kartce. Każdą kartkę proszę podpisać **na górze** imieniem, nazwiskiem, i numerem albumu.

Każde zadanie będzie oceniane w skali 0 - 10. Na ocenę mają wpływ zarówno poprawność odpowiedzi jak i uzasadnienia formułowanych tez. W przypadku korzystania ze stwierdzeń, które nie zostały podane na ćwiczeniach, wykładzie lub w rozdziałach 1 - 10 skryptu, należy podać ich dowód.

---

1. Niech $x \in \mathbb{R}$ oraz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -x & x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,3}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & x & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,4}.$$

(a) Wykaż, że $\mathbb{R}^4 = \operatorname{im} A + \ker B$,

(b) Wyznacz wszystkie wartości parametru x takie, że $\mathbb{R}^4 = \operatorname{im} A \oplus \ker B$.

2. (a) Zbadaj, w zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, czy układ równań

$$\begin{cases} a^2x + ay + 2z = a+4 \\ a^2y + az = 2a \\ ax + a^2z = 4a \end{cases}$$

z niewiadomymi x, y, z jest sprzeczny / niesprzeczny / oznaczony.

(b) Znajdź zbiór rozwiązań tego układu dla $a = 0$ i $a = -1$.

3. Niech $\langle \cdot, \cdot \rangle$ oznacza iloczyn skalarny określony na przestrzeni liniowej $\mathbb{R}[x]_3$ nad ciałem $\mathbb{R}$ taki, że wielomiany

$$p_1(x) = 1, \quad p_2(x) = 1 + x, \quad p_3(x) = 1 + x + x^2, \quad p_4(x) = 1 + x + x^2 + x^3$$

tworzą układ ortonormalny.

(a) Oblicz iloczyny skalarne $\langle x^k, x^l \rangle$ dla $k, l \in \{0, 1, 2, 3\}$.

(b) Znajdź rzut ortogonalny wielomianu $q(x) = x^3$ na podprzestrzeń $\operatorname{span}(x, x^2)$.

4. Niech $n \in \mathbb{N}$. Wyznacz

$$\max \left\{ \operatorname{rank}\Big((A+B)^2\Big) : A, B \in \mathbb{R}^{2n,2n} \text{ i } \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \leqslant n \right\}.$$

Imię i nazwisko: Numer albumu:

Egzamin z GAL-u (Informatyka) – 1. termin

04/02/2019

Część teoretyczna I

Instrukcja: Odpowiedzi należy pisać **na arkuszu z pytaniami**.

W zadaniach 1-10 **należy udzielać odpowiedzi *TAK* lub *NIE***, przy czym

- nawet jedna niepoprawna odpowiedź oznacza 0 pkt. za całe zadanie, a w innym przypadku:
- dokładnie jedna poprawna odpowiedź to 1 pkt za całe zadanie,
- dokładnie dwie poprawne odpowiedzi to 2 pkt za całe zadanie
- 3 poprawne odpowiedzi to 3 punktu za całe zadanie,
- brak odpowiedzi nie jest traktowany jako niepoprawna odpowiedź.

1. Niech $(G, \diamond, e)$ będzie grupą i $a, b \in G$. Wynika z tego, że

- [ ] $(a \diamond b) \diamond (b \diamond a) = a \diamond (b \diamond b) \diamond a$;
- [ ] $a \diamond (e \diamond b) = b \diamond (e \diamond a)$;
- [ ] jeżeli $a \diamond b = e$, to $(b \diamond b) \diamond (a \diamond a) = e$.

2. Niech $z \in \mathbb{C}$. Wynika z tego, że

- [ ] liczba $(z \cdot \overline{z}^2)^2 + z^4 \cdot \overline{z}^2$ jest rzeczywista;
- [ ] liczba $(z - \overline{z})^2$ jest rzeczywista;
- [ ] liczba $(i \cdot z)^2 + (i \cdot \overline{z})^2$ jest rzeczywista.

3. Które z poniższych zbiorów są podprzestrzeniami liniowymi w przestrzeni liniowej $\mathbb{R}[t]$?

- [ ] $\{p \in \mathbb{R}[t] : \deg(p') = 16\}$;
- [ ] $\{p \in \mathbb{R}[t] : \deg(p \circ p) \leqslant 16\}$ (gdzie $p \circ p(t) = p(p(t))$);
- [ ] $\{p \in \mathbb{R}[t] : p'(1+t) + p'(1-t) = 0$ dla każdego $t \in \mathbb{R}\}$.

4. Niech A i B to macierze o rzeczywistych współczynnikach takie, że $AB \in \mathbb{R}^{5,3}$. Wynika z tego, że

- [ ] $\operatorname{rank} A \leqslant 3$;
- [ ] $\operatorname{rank} B \leqslant 3$;
- [ ] $\operatorname{rank}(B^T A^T) \leqslant 3$.

5. W przestrzeni liniowej X wymiaru 6 dane są trzy podprzestrzenie liniowe U, V, W takie, że $\dim U = 2$ oraz $U \cap V = U \cap W = \{0\}$. Wynika z tego, że

- [ ] $\dim V < 4$;
- [ ] $\dim(V \cap W) < 4$;
- [ ] $U \cap (V + W) = \{0\}$.

6. $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ jest przestrzenią euklidesową, $V \subset X$ jest podprzestrzenią liniową i $P_V(x)$ oznacza rzut ortogonalny wektora $x \in X$ na podprzestrzeń V. Wówczas

- [ ] $\|P_V(x)\|^2 = \langle x, P_V(x)\rangle$;
- [ ] jeżeli wektory x i $P_V(x)$ są liniowo zależne, to $x \in V$;
- [ ] jeżeli wektory x i $P_V(x)$ są liniowo niezależne, to $x \in V^\perp$.

---

7. X i Y to przestrzenie liniowe nad ciałem $\mathbb{K}$, $f \in L(X,Y)$ i $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$. Wynika z tego, że

- [ ] jeżeli układ wektorów $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n) \in Y$ jest liniowo niezależny, to wektory $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są liniowo niezależne;
- [ ] jeżeli $Y = \operatorname{span}(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n))$, to $X = \operatorname{span}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;
- [ ] jeżeli $Y = \operatorname{span}(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n))$, to $\dim X \geqslant \dim Y$.

---

8. X jest przestrzenią liniową wymiaru 4, $x_1, x_2, x_3, x_4 \in X$, $f_1^*, f_2^*, f_3^*, f_4^* \in X^*$ oraz

$$f_i^*(x_j) = \begin{cases} 2 & \text{gdy } i = j, \\ 0 & \text{gdy } i \neq j, \end{cases} \qquad \text{dla } i, j = 1, 2, 3, 4.$$

Wówczas

- [ ] $\operatorname{span}(f_1^*, f_2^*, f_3^*, f_4^*) = X^*$,
- [ ] układ x_1, x_2, x_3, x_4 jest liniowo niezależny,
- [ ] jeżeli $y \in X$ i $f_1^*(y) = f_2^*(y) = f_3^*(y) = f_4^*(y) = 0$, to $y = 0$.

---

9. Macierze $A = [a_{i,j}]_{i,j=1}^n, B = [b_{i,j}]_{i,j=1}^n \in \mathbb{C}^{n,n}$ są podobne. Wynika z tego, że

- [ ] $a_{i,i} = b_{i,i}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$;
- [ ] $\operatorname{rank}\big((A + 2i \cdot I_n)^3\big) = \operatorname{rank}\big((B + 2i \cdot I_n)^3\big)$;
- [ ] jeżeli macierz A jest diagonalna, to macierz B też jest diagonalna.

---

10. Macierz symetryczna $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ jest dodatnio określona. Wynika z tego, że

- [ ] $\operatorname{rank} A = n$;
- [ ] macierz A jest podobna do macierzy I_n;
- [ ] macierz A^{-1} jest symetryczna i dodatnio określona.

Imię i nazwisko: Numer albumu:

Egzamin z GAL-u (Informatyka) – 1. termin

04/02/2019

Część teoretyczna II

1. (2 pkt) Podaj definicję *grupy*.

Odp:

2. (3 pkt) Załóżmy, że $(G, \diamond, e)$ jest grupą i $x \in G$. Wykaż, że istnieje dokładnie jeden element $y \in G$ taki, że $x \diamond y = e$ i wówczas także $y \diamond x = e$.

Odp:

3. (2 pkt) Zapisz w postaci trygonometrycznej wszystkie pierwiastki zespolone stopnia 3 z liczby zespolonej $8(\cos(3) + i\sin(3))$.

Odp:

4. (2 pkt.) Niech $p \in \mathbb{R}[z]$ będzie wielomianem zmiennej zespolonej z o współczynnikach rzeczywistych i $p(z_0) = 0$ dla pewnej liczby zespolonej z_0. Wykaż, że $p(\overline{z_0}) = 0$.

Odp:

5. (4 pkt.) X jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:

(i) Układ $x_1, \ldots, x_n$ jest bazą przestrzeni X.

(ii) Dla każdego wektora $x \in X$ istnieją jednoznacznie wyznaczone skalary $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ takie, że

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n.$$

Odp:

6. (2 pkt.) Dana jest macierz $A \in \mathbb{R}^{7,12}$ taka, że $\dim(\operatorname{im} A) = 5$. Wówczas

$\dim(\ker A) =$ $\qquad$ $\operatorname{rank}(A) =$ $\qquad$ $\dim(\ker A^T) =$ $\qquad$ $\operatorname{rank}(A^T) =$

Imię i nazwisko: Numer albumu:

Egzamin z GAL-u (Informatyka) – 1. termin

04/02/2019

Część teoretyczna III

1. (4 pkt.) Sformułuj i udowodnij twierdzenie Kroneckera - Capelliego.

Odp:

2. (2 pkt.) W przestrzeni euklidesowej $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ dany jest układ ortonormalny u_1, u_2, u_3 oraz wektory $x = u_1 - 2u_2 + 2u_3$, $y = u_1 + 3u_2 + 2u_3$. Podaj normę rzutu ortogonalnego wektora y na podprzestrzeń $\mathrm{span}(x)$.

Odp:

3. (2 pkt.) X jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{C}$ wymiaru 5. Wówczas

$\dim(L(X^*, \mathbb{C}^{2,3})) =$, $\dim(L(L(\mathbb{C}, X), L(X^*, \mathbb{C}))) =$, $\dim((L(\mathbb{C}[x]_5, X))^*) =$

4. (2 pkt.) Podaj definicje wartości własnej i wektora własnego endomorfizmu $f \in L(X)$.

Odp:

5. (3 pkt.) Załóżmy, że λ_1, λ_2 są dwiema różnymi wartościami własnymi endomorfizmu $f \in L(X)$ i $v_1, v_2 \in X$ to odpowiadające im wektory własne. Udowodnij, że wektory v_1, v_2 są liniowo niezależne.

Odp:

6. (2 pkt.) Czy macierz $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ jest dodatnio określona? Uzasadnij odpowiedź.

Odp:

Egzamin z GAL-u (Informatyka) – 1. termin 04/02/2019

Zadania

Każde zadanie należy rozwiązywać na oddzielnej kartce. Każdą kartkę proszę podpisać **WIELKIMI LITERAMI na górze** imieniem, nazwiskiem i numerem albumu.

Każde zadanie będzie oceniane w skali 0 - 15. Na ocenę mają wpływ zarówno poprawność odpowiedzi jak i uzasadnienia formułowanych tez. W przypadku korzystania ze stwierdzeń, które nie zostały podane na ćwiczeniach, wykładzie lub w skrypcie, należy podać ich dowód.

ZADANIE 1. W przestrzeni liniowej $\mathbb{C}^{3,3}$ nad ciałem $\mathbb{C}$ dana jest podprzestrzeń

$$X = \left\{A \in \mathbb{C}^{3,3} : A = A^T\right\}.$$

(a) (7 pkt.) Uzupełnij układ macierzy

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}$$

do bazy podprzestrzeni X.

(b) (8 pkt.) Niech $Y = \left\{B \in \mathbb{C}^{3,3} : \forall_{A \in X}\, BA \in X\right\}$. Udowodnij, że $Y = \operatorname{span}(I_3)$.

ZADANIE 2. Dana jest macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 5 \\ -2 & 0 & -2 & -4 \\ 5 & -2 & -1 & 12 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}.$$

(a) (8 pkt.) Wyznacz bazy przestrzeni $\operatorname{im}(A)$ oraz $\ker(A)$.

(b) (7 pkt.) Rozstrzygnij, czy $\mathbb{R}^4 = \operatorname{im}(A) \oplus \operatorname{im}(A^T)$.

ZADANIE 3. Niech $z \in \mathbb{C}$ i

$$A_z = \begin{bmatrix} z & z+1 & 1 \\ 1 & z & z+1 \\ z+1 & 1 & z \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}.$$

Rozstrzygnij, ile jest **różnych** liczb zespolonych z takich, że $\det_3\big((A_z)^4\big) = 16$.

ZADANIE 4. Dana jest macierz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}.$$

(a) (7 pkt.) Dla $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^4$ niech $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_A = \vec{x}^T A \vec{y}$. Udowodnij, że $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ jest iloczynem skalarnym na przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$ (nad ciałem $\mathbb{R}$).

(b) (8 pkt.) W przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle_A)$ dana jest podprzestrzeń liniowa

$$V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\}, \qquad \vec{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T.$$

Wyznacz rzuty ortogonalne wektora $\vec{y} = [1, 1, 1, 1]^T$ na podprzestrzenie V i $V^\perp$.

UWAGA: Iloczyn skalarny w podpunkcie (b) jest zdefiniowany w podpunkcie (a).

ZADANIE 5. Dla ustalonego wielomianu $p \in \mathbb{R}[x]_2$ odwzorowanie $f_p^* : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}$ jest dane wzorem

$$f_p^*(q) = p(-1)q(1) + p(0)q(0) + p(1)q(-1), \qquad q \in \mathbb{R}[x]_2.$$

(a) (3 pkt.) Wykaż, że f_p^* jest funkcjonałem liniowym (czyli $f_p^* \in (\mathbb{R}[x]_2)^*$).

(b) (8 pkt.) Przekształcenie $F : \mathbb{R}[x]_2 \to (\mathbb{R}[x]_2)^*$ jest dane wzorem

$$F(p) = f_p^*, \qquad p \in \mathbb{R}[x]_2.$$

Wykaż, że $F \in L\left(\mathbb{R}[x]_2, (\mathbb{R}[x]_2)^*\right)$. Rozstrzygnij, czy F jest monomorfizmem i czy jest epimorfizmem.

(c) (4 pkt.) Niech $(\phi_1^*, \phi_2^*, \phi_3^*)$ to baza przestrzeni $(\mathbb{R}[x]_2)^*$ dualna do bazy

$$(1,\ 1 + x,\ 1 + x + x^2)$$

i $p(x) = 1 + x^2$. Wyznacz skalary $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ takie, że $f_p^* = \alpha_1 \phi_1^* + \alpha_2 \phi_2^* + \alpha_3 \phi_3^*$.

ZADANIE 6. Endomorfizm $G \in L(\mathbb{R}^{2,2})$ jest dany wzorem

$$G(M) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot M, \qquad M \in \mathbb{R}^{2,2,}.$$

(a) (6 pkt.) Wyznacz macierz endomorfizmu G w bazie

$$E_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{2,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{2,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Pamiętaj o zachowaniu podanej kolejności elementów bazy!)

(b) (9 pkt.) Wyznacz macierz Jordana i znajdź bazę Jordana endomorfizmu G.

Imię i nazwisko: Numer albumu:

Egzamin z GAL-u (Informatyka) – 2. termin

19/02/2019

Część teoretyczna I

Instrukcja: Odpowiedzi należy pisać **na arkuszu z pytaniami**.

W zadaniach 1-10 **należy udzielać odpowiedzi *TAK* lub *NIE***, przy czym

- nawet jedna niepoprawna odpowiedź oznacza 0 pkt. za całe zadanie, a w innym przypadku:
- dokładnie jedna poprawna odpowiedź to 1 pkt za całe zadanie,
- dokładnie dwie poprawne odpowiedzi to 2 pkt za całe zadanie
- 3 poprawne odpowiedzi to 3 punkty za całe zadanie,
- brak odpowiedzi nie jest traktowany jako niepoprawna odpowiedź.

1. Niech $(G, \diamond, e)$ będzie grupą i $a, b \in G$. Wynika z tego, że

- [ ] $((a \diamond e) \diamond (b \diamond a)) \diamond (b \diamond e) = (a \diamond b) \diamond (a \diamond b)$;
- [ ] jeżeli $a \diamond b = e$ to $a \diamond b = b \diamond a$;
- [ ] jeżeli $a \diamond b = b \diamond a$, to $a \diamond b = e$.

2. Istnieje wielomian $p \in \mathbb{R}[x]$ stopnia 7 taki, że $p(2 - i) = p(1 + 2i) = 0$, który ma

- [ ] dokładnie 2 różne pierwiastki rzeczywiste;
- [ ] dokładnie 3 różne pierwiastki rzeczywiste;
- [ ] dokładnie 4 różne pierwiastki rzeczywiste.

3. W przestrzeni liniowej X wymiaru 15 dane są podprzestrzenie liniowe U, V, W takie, że $\dim U = \dim V = \dim W$ oraz $X = U \oplus (V + W)$. Wówczas

- [ ] $U \cap V = \{0\}$;
- [ ] $V \cap W = \{0\}$;
- [ ] $W \cap U = \{0\}$.

4. Dana jest macierz $A \in \mathbb{R}^{10,7}$ taka, że $\dim(\ker(A^T)) = 5$. Wówczas

- [ ] $\dim(\ker A) = 5$;
- [ ] $\dim(\operatorname{im} A) = 5$;
- [ ] $\dim(\operatorname{im}(A^T)) = 5$.

5. Macierz $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy

- [ ] $\ker(A) \oplus \operatorname{im}(A) = \mathbb{R}^n$;
- [ ] $\dim(\ker(AA^T)) = 0$;
- [ ] $\det_n(AA^T) \neq 0$.

6. $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ jest przestrzenią z iloczynem skalarnym i układ wektorów x_1, x_2, x_3, x_4 jest ortonormalny. Wynika z tego, że

- [ ] wektory $x_1 + x_2 - x_3 - x_4$ i $x_1 - x_2 + x_3 - x_4$ są ortogonalne;
- [ ] $\operatorname{span}((x_1, x_2)^\perp) = \operatorname{span}(x_3, x_4)$;
- [ ] $\|x_1 + x_2 + x_3 + x_4\| = \|x_1 - x_2 - x_3 + x_4\|$.

---

7. X i Y to przestrzenie liniowe nad ciałem $\mathbb{C}$, $f \in L(X, Y)$ i $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$. Wynika z tego, że

- [ ] jeżeli wektory $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są liniowo niezależne, to wektory $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n) \in Y$ są liniowo niezależne;
- [ ] jeżeli wektory $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są liniowo zależne, to wektory $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n) \in Y$ są liniowo zależne;
- [ ] jeżeli $X = \operatorname{span}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, to $\operatorname{im} f = \operatorname{span}(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n))$.

---

8. Która z poniższych funkcji określona na przestrzeni liniowej $\mathbb{R}[x]$ jest elementem przestrzeni $(\mathbb{R}[x])^*$?

- [ ] $g(p) = 2p(1)p'(0) - 3p(0)p'(1)$, gdzie $p \in \mathbb{R}[x]$;
- [ ] $f(p) = 2p(1) - 3p'(0)$, gdzie $p \in \mathbb{R}[x]$;
- [ ] $h(p) = (p \circ p)(0)$, gdzie $p \in \mathbb{R}[x]$.

---

9. X jest przestrzenią liniową wymiaru 4, $x_1, x_2, x_3, x_4 \in X$, $f_1^*, f_2^*, f_3^*, f_4^* \in X^*$ oraz

$$f_i^*(x_j) = \begin{cases} -1 & \text{gdy } i = j, \\ 0 & \text{gdy } i \neq j, \end{cases} \qquad \text{dla } i, j = 1, 2, 3, 4.$$

Wówczas

- [ ] $X = \operatorname{span}(x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_1 + x_4)$,
- [ ] funkcjonały $f_1^* - f_2^*, f_2^* - f_3^*, f_3^* - f_4^*, f_4^* - f_1^*$ są liniowo niezależne,
- [ ] jeżeli $g^* \in X^*$ i $g^*(x_i) = 0$ dla $i = 1, 2, 3, 4$, to $g^*(x) = 0$ dla każdego $x \in X$.

---

10. Macierz $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ jest symetryczna i $\operatorname{rank} A = n$. Wynika z tego, że

- [ ] macierz A jest podobna do pewnej macierzy diagonalnej $D \in \mathbb{R}^{n,n}$;
- [ ] wielomian charakterystyczny macierzy A jest iloczynem czynników stopnia 1 o rzeczywistych współczynnikach;
- [ ] macierz A^2 jest symetryczna i dodatnio określona.

Imię i nazwisko: Numer albumu:

Egzamin z GAL-u (Informatyka) – 2. termin

19/02/2019

Część teoretyczna II

1. (2 pkt) Sformułuj *zasadnicze twierdzenie algebry.*

Odp:

2. (4 pkt) Niech $z, w \in \mathbb{C}$. Wykaż, że $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ oraz $\big||z| - |w|\big| \leqslant |z - w|$.

Odp:

3. (2 pkt) Zapisz w postaci trygonometrycznej wszystkie pierwiastki zespolone stopnia 4 z liczby zespolonej $1 - i$.

Odp:

4. (4 pkt.) Załóżmy, że U, V są podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni liniowej X nad ciałem $\mathbb{K}$. Wykaż, że następujące warunki są równoważne

(i) $U \cap V = \{0\}$,

(ii) dla każdego wektora $x \in U + V$ wektory $u \in U$,$v \in V$ takie, że $x = u + v$ są wyznaczonej jednoznacznie.

Odp:

5. (4 pkt.) Macierz $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ jest nieosobliwa. Wykaż, że $\operatorname{im} A = \mathbb{R}^n$ i $\ker A = \{0\}$.

Odp:

Imię i nazwisko: Numer albumu:

Egzamin z GAL-u (Informatyka) – 2. termin

19/02/2019

Część teoretyczna III

1. (2 pkt.) $\det_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} =$

2. (2 pkt.) W przestrzeni euklidesowej $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ takiej, że $\dim X = 9$, dane są liniowo niezależne wektory x, y, z. Wówczas

$\dim(\mathrm{span}(x, y, z)^{\perp}) =$ $, \dim((\mathrm{span}(x + y, x + z)^{\perp})^{\perp}) =$

3. (3 pkt.) Udowodnij, że każdy ortogonalny układ wektorów w przestrzeni z iloczynem skalarnym $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ jest liniowo niezależny.

Odp:

4. (2 pkt.) Zapisz macierz przekształcenia liniowego $f \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}[t]^2)$ w bazach $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ i $(1, t, t^2)$, jeżeli f jest dane wzorem $f(\vec{x}) = x_1(1+t)+x_2(1+t^2)+x_3(1-t)+x_4(1-t^2)$, gdzie $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$.

Odp:

---

5. (2 pkt.) Wielomian charakterystyczny endomorfizmu $f \in L(X)$ jest równy $x^n - 1$. Czy f jest izomorfizmem? Uzasadnij odpowiedź.

Odp:

---

6. (3 pkt.) Czy macierze $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ są podobne? Uzasadnij odpowiedź.

Odp:

Egzamin z GAL-u (Informatyka) – 2. termin 19/02/2019

Zadania

Każde zadanie należy rozwiązywać na oddzielnej kartce. Każdą kartkę proszę podpisać **WIELKIMI LITERAMI na górze** imieniem, nazwiskiem i numerem albumu.

Każde zadanie będzie oceniane w skali 0 - 15. Na ocenę mają wpływ zarówno poprawność odpowiedzi jak i uzasadnienia formułowanych tez. W przypadku korzystania ze stwierdzeń, które nie zostały podane na ćwiczeniach, wykładzie lub w skrypcie, należy podać ich dowód.

ZADANIE 1. Dla liczby całkowitej $n > 1$ niech

$$u_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Rozstrzygnij, dla jakich wartości n liczba $\dfrac{u_n - 1}{|u_n - 1|}$ jest zespolonym pierwiastkiem stopnia n z liczby -1.

ZADANIE 2. Znajdź wszystkie pary liczb rzeczywistych (a, b) takie, że układ równań

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + ax_3 = b + 2, \\ -x_1 + x_2 + bx_3 = a + 2. \end{cases}$$

(a) ma rozwiązanie, (b) jest oznaczony.

ZADANIE 3. Dana jest macierz $A = [a_{i,j}]_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n,n}$ taka, że $\operatorname{rank} A = 1$. Wykaż, że

$$\det_n(A + I_n) = a_{1,1} + a_{2,2} + \ldots + a_{n,n} + 1.$$

ZADANIE 4. W przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^4, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, gdzie $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \vec{x}^T\vec{y}$ dla $\vec{x},\vec{y} = \mathbb{R}^4$, dane są podprzestrzenie liniowe

$$V = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix}1\\2\\1\\0\end{bmatrix}\right), \quad W = \left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_2 - x_3 + x_4 = x_1 = 0\right\}$$

(a) (8 pkt.) Czy suma $V^\perp + W^\perp$ jest prosta?

(b) (7 pkt.) Czy $\mathbb{R}^4 = V + W^\perp$?

Odpowiedzi należy uzasadnić.

ZADANIE 5. Dane są macierze

$$A_1 = \begin{bmatrix}5 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$$

(a) (5 pkt.) Pokaż, że układ A_1, A_2, A_3 jest bazą przestrzeni liniowej

$$V = \{A \in \mathbb{R}^{2,2} : A = A^T\}.$$

(b) (5 pkt.) Wyznacz bazę (g_1^*, g_2^*, g_3^*) przestrzeni V^* dualną do bazy (A_1, A_2, A_3).

(c) (5 pkt.) Funkcjonał liniowy $f^* \in V^*$ jest dany wzorem

$$f^*\left(\begin{bmatrix}a & b\\b & c\end{bmatrix}\right) = 5a + 6b + 7c.$$

Znajdź liczby $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ takie, że $f^* = \beta_1 g_1^* + \beta_2 g_2^* + \beta_3 g_3^*$.

ZADANIE 6. Dana jest macierz

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 1\\4 & 0 & 1 & 0\\0 & 4 & 0 & 1\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}$$

i endomorfizm $F \in L(\mathbb{R}^4)$ zdefiniowany wzorem $F(\vec{x}) = A\vec{x}$ dla $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$.

(a) (8 pkt.) Wyznacz wartości własne i bazy podprzestrzeni własnych endomorfizmu F.

(b) (7 pkt.) Znajdź wszystkie liczby rzeczywiste k takie, że endomorfizm $G \in L(\mathbb{R}^4)$ dany wzorem

$$G(\vec{x}) = F(F(\vec{x})) + k\vec{x}, \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R}^4,$$

nie jest izomorfizmem.