

Funkcje wykładnicza i logarytmiczna I

Tw. 1. (istnienie i własności funkcji wykładniczej). Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ ciąg

$$a_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

jest zbieżny do granicy $g(x) \in \mathbb{R}$, którą zapisujemy $\exp x$.

Funkcję $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *funkcją wykładniczą* lub *eksponentą*. Ma ona następujące własności:

- (i) $\exp(x) > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ oraz $\exp(x) \geq 1$ dla $x \geq 0$ i $\exp(x) \leq 1$ dla $x \leq 0$;
 - (ii) $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$;
 - (iii) jeżeli $x \in \mathbb{Q}$, to $\exp x = e^x$;
 - (iv) $\exp x \geq 1 + x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ i $\exp x \leq \frac{1}{1 - x}$ dla $x < 1$;
 - (v) funkcja $\exp$ jest ściśle rosnąca; jeśli $x_n \rightarrow +\infty$ to $\exp x_n \rightarrow +\infty$ i $\exp(-x_n) \rightarrow 0$.
- Ze względu na punkty (ii) i (iii) ma sens zapis $e^x = \exp x$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$.

Tw. 2. Dla każdego $x \in \mathbb{R}$

$$\exp x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

Stw. 3. (i) Jeśli $(x_n)_n$ jest ciągiem liczb rzeczywistych takim, że $x_n \rightarrow x \in \mathbb{R}$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp x_n = \exp x$.

(ii) Niech $x \in \mathbb{R}$ i $(t_n)_n$ jest ciągiem liczb rzeczywistych różnych od zera i zbieżnym do zera. Wówczas $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\exp(x + t_n) - \exp x}{t_n} = \exp x$.

Tw. 4. Obrazem funkcji $\exp$ jest cała półprosta $(0, +\infty)$. Zatem $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ jest bijekcją.

Definicja. Logarytm naturalny liczby dodatniej $y > 0$ jest to jedyna liczba $x \in \mathbb{R}$ taka, że $\exp(x) = y$. Piszemy wówczas $\ln y = x$.

Stw. 5. Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $\ln(\exp x) = x$; dla każdego $x > 0$ zachodzi $\exp(\ln x) = x$, czyli $\ln : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją odwrotną do $\exp$.

Stw. 6. (Własności logarytmu naturalnego)

- (i) Funkcja $\ln x$ jest rosnąca;
- (ii) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ dla dowolnych $x, y > 0$ i $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$;
- (iii) dla każdego $x > 0$ spełnione są nierówności $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$;

(iv) jeżeli $t_n > -1$ dla $n \in \mathbb{N}$ i $t_n \rightarrow 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1 + t_n) = 0 = \ln 1$ i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + t_n)}{t_n} = 1;$$

(v) jeżeli $x_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$ i $x_n \rightarrow x > 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln x_n = \ln x$;

(vi) jeżeli $x_n > 0$ i $x_n \rightarrow +\infty$, to $\ln x_n \rightarrow +\infty$;

(vii) jeżeli $x_n > 0$ i $x_n \rightarrow 0$, to $\ln x_n \rightarrow -\infty$.

1. Wykaż, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $|e^x - 1 - x| \leq |x|^2 \cdot e^{|x|}$.

2. Niech $q \in (0, 1)$, $x, y \in \mathbb{R}$ i $x \neq y$. Udowodnij nierówność

$$(1 - q) \exp x + q \exp y > \exp((1 - q)x + qy).$$

3. Niech $a > 0$ i $x \in \mathbb{Q}$. Udowodnij, że $a^x = \exp(x \cdot \ln a)$.

4. Niech $a > 0$. Oblicz granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot (\sqrt[n]{a} - 1)$.

5. Niech $x_n \rightarrow x \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n = e^x$.

6. Niech $t_n \neq 0$, $t_n \rightarrow 0$ i $x > 0$. Udowodnij, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(x + t_n) - \ln x}{t_n} = \frac{1}{x}$.

7. Udowodnij, że ciąg $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ jest zbieżny.

8. Oblicz granice

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right), \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

9. Niech $a_1, a_2, \dots, a_m > 0$. Oblicz granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} + \dots + \sqrt[n]{a_m}}{m} \right)^n$.

10. Dany jest ciąg $(a_n)_n$ taki, że (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = a$. Udowodnij, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k} = a.$$

11. Dany jest ciąg liczb dodatnich (a_n) taki, że $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = g$. Udowodnij, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} \cdot \ln \frac{1}{a_n} = g.$$

12. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_n$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{\exp x_1 + \exp x_2 + \dots + \exp x_n}{n} \geq \exp \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right).$$

Funkcje wykładnicza i logarytmiczna II

Definicja potęgi o wykładniku rzeczywistym. Niech $a > 0$. Wiemy już, że jeśli $x \in \mathbb{Q}$, to $a^x = \exp(x \ln a)$. Ostatnia równość ma sens dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, więc definiujemy potęgę liczby a z wykładnikiem $x \in \mathbb{R}$ wzorem

$$a^x = \exp(x \ln a) = e^{x \ln a}.$$

Funkcję $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ daną wzorem $f(x) = a^x$ nazywamy *funkcją wykładniczą* o podstawie a .

Stw. 1. Jeżeli $a, b > 0$ i $x, y \in \mathbb{R}$ to

$$(i) a^{x+y} = a^x \cdot a^y \text{ i } a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x \quad (ii) a^{xy} = (a^x)^y, \quad (iii) a^x \cdot b^x = (ab)^x,$$

Stw. 2. Obrazem funkcji wykładniczej o podstawie $a \neq 1$ jest zbiór $(0, +\infty)$. Ponadto

- Jeżeli $a > 1$ to funkcja $x \rightarrow a^x$ jest ściśle rosnąca. Jeśli $x_n \rightarrow +\infty$, to $a^{x_n} \rightarrow +\infty$ i $a^{-x_n} \rightarrow 0$.
- Jeżeli $a < 1$ to funkcja $x \rightarrow a^x$ jest ściśle malejąca. Jeśli $x_n \rightarrow +\infty$, to $a^{x_n} \rightarrow 0$ i $a^{-x_n} \rightarrow +\infty$.

Definicja logarytmu. Niech $a > 0$ i $a \neq 1$. Wówczas funkcja $a^x: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ jest bijekcją, ma więc funkcję odwrotną. *Logarytmem* o podstawie a z liczby $y > 0$ nazywamy jedyną liczbę rzeczywistą x taką, że $a^x = y$. Piszemy wówczas

$$\log_a y = x.$$

Logarytm o podstawie $a = 10$ nazywamy *logarytmem dziesiętnym* i zapisujemy $\log y = \log_{10} y$. Oczywiście $\ln y = \log_e y$.

Stw. 3. Jeżeli $a > 0$ i $a \neq 1$, to

- (i) $\log_a 1 = 0$ i $\log_a a = 1$;
- (ii) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ dla $x, y > 0$;
- (iii) $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a x$ dla $x > 0$ i $y \in \mathbb{R}$.

Stw. 4. Funkcja $x \rightarrow \log_a x$, gdzie $x \in (0, +\infty)$ jest rosnąca dla $a > 1$ i malejąca dla $a < 1$, a jej obrazem jest cały zbiór liczb rzeczywistych.

Stw. 5. (Zmiana podstawy logarytmu) Niech $a, b > 0$, $a, b \neq 1$, $x > 0$. Wówczas

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

2. Wykaż, że dla $a_1, a_2, \dots, a_k > 0$, $a_i \neq 1$

$$\log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \cdot \dots \cdot \log_{a_{k-1}} a_k \cdot \log_{a_k} a_1 = 1.$$

3. Wykaż, że dla $a, b > 0$, $a \neq 1$, oraz $p \neq 0$ zachodzi równość $\log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b$.

4. Uprość wyrażenia

$$(a) \log_{3\sqrt{3}} 27$$

$$(f) \log_{\sqrt{2}} 27 \cdot \log_9 16$$

$$(b) 2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$$

$$(g) \log_{16} \sqrt{5} \cdot \log_{25} \sqrt[3]{7} \cdot \log_{\frac{1}{49}} 32$$

$$(c) (\sqrt{2})^{\log_2 9}$$

$$(d) (\sqrt[3]{9})^{\frac{1}{5 \log_5 3}}$$

$$(h) \frac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \frac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$$

$$(e) \log 5 \cdot \log 20 + (\log 2)^2$$

5. Znajdź granice ($a > 0$ i $a \neq 1$)

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} (\log_a(n+1) - \log_a n),$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\log_a n},$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n^t}, t > 0,$$

$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{\log_a n}},$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \log_n x, x > 0,$$

$$(f) \lim_{n \rightarrow \infty} \log_n(n+1).$$

6. Wykaż, że jeśli $0 < a < 1 < b$, to $\log_a b + \frac{1}{4} \log_b a + 1 \leq 0$.

7. Niech $a, b, c, x > 0$ i $a, b, c, abc \neq 1$. Wiedząc, że $\log_a x = 2$, $\log_b x = 3$, $\log_c x = 6$, oblicz $\log_{abc} x$.

8. Niech $x_1, x_2, \dots, x_n, a > 0$ i $x_1 x_2 \dots x_n = a$. Udowodnij, że

$$(\log_a x_1)^2 + (\log_a x_2)^2 + \dots + (\log_a x_n)^2 \geq \frac{1}{n}.$$

9. Niech $n \geq 2$. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \dots, a_n > 1$

$$\log_{a_1}(a_2) + \log_{a_2}(a_3) + \dots + \log_{a_{n-1}}(a_n) + \log_{a_n}(a_1) \geq n.$$

10. Niech $n \geq 2$. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \dots, a_n, x > 1$

$$\log_{\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}}(x) \leq \sqrt[n]{\log_{a_1}(x) \cdot \log_{a_2}(x) \cdot \dots \cdot \log_{a_n}(x)}.$$

11. Niech $x > 0$. Udowodnij nierówność $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$.

12. Dany jest ciąg liczb dodatnich (a_n) taki, że $a_n \neq 1$ i $a_n \rightarrow 1$. Udowodnij, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_n}{a_n - 1} = 1.$$

13. Oblicz granicę ciągu o wyrazach

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right).$$

1. Czy liczba niewymierna podniesiona do potęgi niewymiernej może dać liczbę wymierną?

Funkcje wykładnicza i logarytmiczna III

Funkcje hiperboliczne. Dla $x \in \mathbb{R}$ niech

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

- (a) Funkcja $\cosh x$ maleje na półprostej $(-\infty, 0]$ i rośnie na $[0, +\infty)$, natomiast funkcja $\sinh x$ jest ściśle rosnąca.
- (b) Zachodzi tożsamość zwana *jedynką hiperboliczną*: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.
- (c) Zachodzą tożsamości:

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

1. Wyznacz funkcję odwrotną do $\cosh x$ na $[0, +\infty)$ i funkcję odwrotną do $\sinh x$.
2. Udowodnij, że funkcja $\operatorname{tgh} x$ jest rosnącą bijekcją $\mathbb{R}$ na przedział $(-1, 1)$ i wyznacz jej funkcję odwrotną.
3. Udowodnij, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność

$$\frac{\cosh x + \cosh y}{2} \geq \cosh \frac{x + y}{2},$$

natomiast dla $x, y \geq 0$ zachodzi także nierówność

$$\frac{\sinh x + \sinh y}{2} \geq \sinh \frac{x + y}{2}.$$

4. Udowodnij, że jeśli $x \in \mathbb{R}$, to $\cosh x \geq 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$.

5. Rozwiąż równania:

(a) $7^{x-5} = 9^{5-x}$,

(b) $7^{x+1} + 7^x = 56$,

(c) $x^{x^2-5x+6} = 1$.

(d) $8^x - 3 \cdot 4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$,

(e) $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$,

(f) $2^{3x} \cdot 7^{x-2} = 4^{x-1}$,

(g) $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$,

(h) $8^x(3x+1) = 4$,

(i) $9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$,

(j) $\log_{(x+2)} 16 = 2$,

(k) $\log_x 7 + \log_{x^2} 7 = 6$,

(l) $\sqrt{x^x} = x^{\sqrt{x}}$,

(m) $x^{\ln x} = e$

(n) $\frac{1}{5-4\log x} + \frac{4}{1+\log x} = 3$,

(o) $\log_4(x+2) \cdot \log_x 2 = 1$,

(p) $x^{\frac{1}{4}(\log x + 7)} = 10^{\log x + 1}$

(q) $x^{1/\log x} = 10^{x^4}$

(r) $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$

(s) $\log_4(2 \log_3(1 + \log_2(1 + \log_2 x))) = \frac{1}{2}$

(t) $x^{\log^2 x + \log(x^3) + 3} = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{1+x-1}} - \frac{1}{\sqrt{1+x+1}}}$

6. Dla danej liczby $a > 0$ rozwiąż równanie

$$1 + \log_x \frac{4-x}{10} = (\log(\log a) - 1) \cdot \log_x 10.$$

7. Wyznacz największą wartość funkcji $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) = \ln(x) + \ln(1-x).$$

8. Rozwiąż nierówności

(a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} \leq 8$

(b) $\frac{1}{3^{x^2}} \cdot 9^{x+1} > \frac{1}{729}$

(c) $8^x - 2 \leq 18 \cdot 4^{x-1} - 3 \cdot 2^{x+1}$

(d) $x^2 \cdot 2^x + x \cdot 2^{x-1} > 0$

(e) $\frac{1}{2^x - 1} > \frac{1}{1 - 2^{x-1}}$

(f) $\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2^{x+1} \geq 1$

(g) $3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}} > 4^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

(h) $x^{\frac{3}{4}x} < (\sqrt{x})^{x^2-x+1}$

(i) $(x^2 + x + 1)^x < 1$

(j) $|x|^{x^2-x-2} < 1$

(k) $\log_3(x^2 - 1) < 1$

(l) $\ln(x+1) - \ln x < 2$

(m) $\log_{(2x-3)} x \leq 1$

(n) $\log_x(x-1) \geq 2$

(o) $\log_{(x-3)} \frac{x-2}{x-4} \geq 1$

(p) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x+1} < 1 + \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{4-x^2}$

(q) $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 > (\log_{4x} 2)^2$

(r) $\frac{\log(35-x^3)}{\log(5-x)} > 3$

9. Niech $a \in (0, 1)$. Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = a^x + (1-a)^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Rozwiąż nierówności $f(x) < 1$ i $f(x) > 1$.

Granica funkcji

Definicja. Niech $A \in \mathbb{R}$. Mówimy, że liczba $b \in \mathbb{R}$ jest *punktem skupienia* zbioru A , jeżeli istnieje ciąg liczb $a_n \in A \setminus \{b\}$ taki, że $a_n \rightarrow b$. Przyjmujemy, że $+\infty$ jest punktem skupienia zbioru A nieograniczonego z góry, a $-\infty$ jest punktem skupienia zbioru A nieograniczonego z dołu. Umawiamy się, że $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$.

Definicja Heinego (ciągowa) granicy funkcji w punkcie. Niech $A \subset \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ jest punktem skupienia zbioru A i $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Mówimy, że $g \in \mathbb{R}$ jest granicą funkcji f w punkcie b , jeżeli dla każdego ciągu $a_n \in A \setminus \{b\}$, takiego że $a_n \rightarrow b$ zachodzi $f(a_n) \rightarrow g$. Piszemy wówczas $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = g$ lub $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} g$.

Granice jednostronne. Mówimy, że g jest granicą prawostronną (lewostronną) funkcji f w punkcie $b \in \mathbb{R}$ jeżeli dla każdego ciągu $a_n \in A \cap (b, +\infty)$ ($a_n \in A \cap (-\infty, b)$) takiego, że $a_n \rightarrow b$ zachodzi $f(a_n) \rightarrow g$. Piszemy wówczas

$$\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = g \text{ (granica prawostronna)} \quad \text{ i } \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = g \text{ (granica lewostronna)}.$$

Stw. 1. Niech $A \subset \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ jest punktem skupienia zbioru A i $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Wówczas $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = g$.

Stw. 2. (Własności arytmetyczne granicy funkcji) Niech $A \subset \mathbb{R}$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ jest punktem skupienia zbioru A i istnieją granice $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = c$, $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = d$,

gdzie $b, c \in \overline{\mathbb{R}}$. Wówczas

- (i) jeśli jest określona suma/różnica $c \pm d$, to $\lim_{x \rightarrow b} (f(x) \pm g(x)) = c \pm d$.
- (ii) jeśli jest określony iloczyn $c \cdot d$, to $\lim_{x \rightarrow b} f(x)g(x) = cd$.
- (iii) jeśli jest określony iloraz $\frac{c}{d}$, to $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{c}{d}$.

Stw. 3. (Granica złożenia funkcji) Niech $A, B \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}$. Jeżeli

- $f(A) \subset B$,
- $a \in \overline{\mathbb{R}}$ jest punktem skupienia zbioru A , $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$ i $f(x) \neq b$ dla x dostatecznie bliskich a ,
- b jest punktem skupienia zbioru B i $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c \in \overline{\mathbb{R}}$,

to $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$.

Stw. 4. (Ważne granice)

- (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- (iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- (v) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$
- (iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[k]{x+1} - 1}{x} = \frac{1}{k}$
- (vi) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

1. Udowodnij, korzystając z definicji granicy funkcji w punkcie, że

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \quad (d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$$

2. Niech $a > 0$. Udowodnij, że $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^a} = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$.

3. Oblicz granice, o ile istnieją, badając odpowiednie granice jednostronne.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} [x] \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} [x] \quad (d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x + [x]}$$

4. Oblicz granice

$$\begin{aligned} (a) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} & \quad (c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} \\ (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} & \quad (d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x} \\ (e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + 2x^5} & \quad (j) \lim_{x \rightarrow -32} \frac{\sqrt{17-x} - 7}{2 + \sqrt[5]{x}} \\ (f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^{2022} - 2022}{x^2 - 1} & \quad (k) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+6x-14x^7} - 3}{x + x^2 + x^3} \\ (g) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{257} - 257x + 256}{(x-1)^2} & \quad (l) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x}) \dots (1-\sqrt[99]{x})}{(1-x)^{99}} \\ (h) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[6]{x} + \sqrt[8]{x} + \sqrt[10]{x}}{\sqrt{961x+1024}} & \quad (m) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}} \\ (i) \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x\sqrt{x}} - 8}{\sqrt[4]{x} - 2} & \quad (n) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} \left(\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2} \right) \end{aligned}$$

5. Oblicz granice

$$\begin{aligned} (a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)}, \alpha, \beta \neq 0 & \quad (f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos^2 x)}{e^{2x} - 2e^x + 1} \\ (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{x} & \quad (g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}, a > 0 \\ (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x + \sin x} - \sqrt[3]{x - \sin x}}{\sqrt[3]{x}} & \quad (h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x}, a \in \mathbb{R} \\ (d) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \cdot \sin(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) & \quad (i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^{3x^2} - 1)}{\operatorname{tg}^2(\sin(5x))} \\ (e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(e^x - 1)}{\ln^2(1 + \sin x)} & \quad (j) \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sin x)^{\frac{a}{x}}, a > 0 \end{aligned}$$

6. Oblicz granice (a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$, (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$, (c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x$ (d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1)^x$.

7. Wykaż, że funkcja Riemanna $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{gdy } x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, x = \frac{p}{q}, \text{ gdzie } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \text{NWD}(p, q) = 1 \\ 0 & \text{gdy } x \notin \mathbb{Q} \text{ lub } x = 0 \end{cases}$$

ma w każdym punkcie $a \in \mathbb{R}$ granicę równą 0.

Granica funkcji II

1. Definicja Cauchy'ego granicy funkcji. Niech $A \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ jest punktem skupienia zbioru A , $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ i $g \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

- (i) Liczba g jest granicą funkcji f w punkcie a .
- (ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A \setminus \{a\} |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$.

2. Sformułuj i udowodnij warianty definicji Cauchy'ego granicy funkcji dla przypadków gdy $b = \pm\infty$ lub $g = \pm\infty$.

3. Funkcja $f : (-a, a) \setminus \{0\} \rightarrow (0, +\infty)$ spełnia warunek

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) + \frac{1}{f(x)} \right) = 2.$$

Udowodnij, że $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

4. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest monotoniczna i $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = 1$. Udowodnij, że

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = 1 \text{ dla każdego } c > 0.$$

5. Niech $f : [0, 1] \rightarrow [-M, M]$, $a, b > 1$ i $f(ax) = bf(x)$ dla $x \in [0, \frac{1}{a}]$. Udowodnij, że $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$.

Powtórzenie

6. Rozwiąż równania

- (a) $\log(x+5) + \log(x-4) = \log(x-3) + \log(x-2)$,
- (b) $\log(\frac{1}{2} + x) = \log \frac{1}{2} - \log x$,
- (c) $x + \log(1+2^x) = x \log 5 + \log 6$,
- (d) $(2x+1)^{\ln(2x+1)-3} = \frac{1}{e^2}$,
- (e) $\log_2(2^x + 4^x) - 3 = \log_4 \left((2^{2x-1} - \frac{1}{4})^2 \right)$.

7. Rozwiąż nierówności

- (a) $5^{2x+1} > 5^x + 4$,
- (b) $2^{x^2-6x+3} \geq \frac{1}{4}$
- (c) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x < 2$,
- (d) $\log_x \frac{x+3}{x-1} > 1$.

8. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\log_6^2 3 + \log_6 16}{\log_6^3 \cdot \log_6 48 + \log_6^2 4}$.

9. Niech $a, b > 0$, $ab \neq 1$ i $\log_{ab} a = 4$. Oblicz $\log_{ab} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$.

10. Niech $a, b, c > 0$ i $a, b, ab \neq 1$. Oblicz wartość wyrażen

$$(a) (\log_{ab} a)(\log_{ab}(ab^2)) + (\log_{ab} b)^2, \quad (b) a\sqrt{\log_a b} + b\sqrt{\log_b a}.$$

11. Oblicz granice ciągów

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+e^n)}{n}, \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sinh \frac{1}{n}, \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\cosh \frac{1}{n} - 1 \right).$$

12. Oblicz granice

- (a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + 3x^2 - 4}{x + 1}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[5]{x}}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x + 1}}{1 - \sqrt{x + 1}}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\sin x} - \sqrt{\cos x}}{\sin x - \cos x}$
- (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x}$
- (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \ln(1+x)) \cdot \operatorname{tg}(e^x - 1)}{\cos(\sin x) - 1}$
- (g) $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} x$
- (h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\ln(\cosh x)}$
- (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4}$
- (j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sin\left(\frac{x - \sin x}{\sin x}\right)}{x - \sin x}$
- (k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \ln(1 + e^{-x})$
- (l) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt[3]{x^3 - x + 2}$
- (m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x(x+1)^2} - \sqrt[3]{x(x-1)^2}$
- (n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \sqrt{x+2} \cdot (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$
- (o) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cosh(\ln(2x^2 + 1))}{\sinh(\ln(x^2 - 1))}$

13. Oblicz granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos(2x))^\pi}{\sin x \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{x+2}}.$$

14. Udowodnij, że jeśli $-1 < x < 1$, to

$$\cosh x \leq \frac{1}{1-x^2} \quad \text{oraz} \quad |\sinh x| \leq \frac{|x|\sqrt{2-x^2}}{1-x^2}.$$

Ciągłość funkcji I

Wszędzie I, J to przedziały (skończone lub nie) zawarte w $\mathbb{R}$.

Definicja. Funkcja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie $c \in I$, jeżeli $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$. Funkcja f jest ciągła (na I) jeżeli jest ciągła w każdym punkcie $c \in I$.

Ciągłość funkcji f w punkcie c jest równoważna warunkowi:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (c - \delta, c + \delta) |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Stw. 1. Jeżeli funkcje $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe w punkcie $c \in I$, to funkcje $f + g$ i $f \cdot g$ też są ciągłe w punkcie c . Ponadto, jeżeli $f(c) \neq 0$ to funkcja $1/f$ jest określona na pewnym przedziale otwartym zawierającym punkt c i jest ciągła w c .

Wniosek. Każdy wielomian jest funkcją ciągłą na $\mathbb{R}$. Każda funkcja wymierna jest ciągła na całej swojej dziedzinie.

Stw. 2. Jeżeli $f : I \rightarrow J, g : J \rightarrow \mathbb{R}$, funkcja f jest ciągła w punkcie $c \in I$ i funkcja g jest ciągła w punkcie $f(c)$, to funkcja $g \circ f$ jest ciągła w punkcie c .

Stw. 3. Każda z funkcji $\sqrt{x}, x^a (x > 0), x^k (k \in \mathbb{Z}), \sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x, a^x (a > 0), \log_a x$ są ciągłe w każdym punkcie swojej dziedziny.

Definicja. Kresy górny i dolny funkcji $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definiujemy odpowiednio jako kres górny i dolny zbioru $f(A) \subset \mathbb{R}$. Kresy to zapisujemy jako $\sup_{x \in A} f(x)$ i $\inf_{x \in A} f(x)$ lub $\sup_A f$ i $\inf_A f$.

Tw. Weierstrassa o kresach Jeżeli funkcja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to istnieją $c, d \in [a, b]$ takie, że $f(c) = \sup_{[a,b]} f$ i $f(d) = \inf_{[a,b]} f$.

Wniosek. Każdy wielomian parzystego stopnia o dodatnim (ujemnym) współczynniku wiodącym przyjmuje wartość najmniejszą (największą).

Wniosek. Jeżeli funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i okresowa, to f przyjmuje wartość największą i najmniejszą.

1. Dla jakich $a, b, c \in \mathbb{R}$ ciągłe są funkcje

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos ax}{x^2} & \text{gdy } x \neq 0 \\ b & \text{gdy } x = 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+x)}{\sin(\sin(ax))} & \text{gdy } x < 0 \\ b & \text{gdy } x = 0 \\ x + c & \text{gdy } x > 0 \end{cases}$$

2. Funkcja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła. Udowodnij, że funkcja $|f|$ też jest ciągła. Czy prawdziwa jest implikacja odwrotna?

3. Funkcje $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe i $f(x) = g(x)$ dla każdego $x \in I \cap \mathbb{Q}$. Udowodnij, że $f = g$.
4. Funkcje $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe. Czy funkcja $h(x) = \max(f(x), g(x))$ jest ciągła?
5. Wyznacz zbiory punktów ciągłości funkcji $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \sin |x| & \text{gdy } x \in \mathbb{Q} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}(\pi x) & \text{gdy } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0 & \text{gdy } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

6. Znajdź zbiory punktów ciągłości funkcji $f(x) = [x] \sin(\pi x)$ i $g(x) = [x^2] \sin(\pi x)$, $x \in [0, +\infty)$.
7. Udowodnij, że funkcja Riemanna jest ciągła w każdym punkcie niewymiernym i nie jest ciągła w każdym punkcie wymiernym.
8. Zbadaj ciągłość funkcji

$$(a) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}, x > 0 \quad (c) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^n + x^n)}{n}, x \geq 0$$

$$(b) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}, x \in \mathbb{R} \quad (d) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}, x \in \mathbb{R}$$

9. Wyznacz wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ciągłe w 0 i takie, że $f(x+y) = f(x) + f(y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$.
10. Wykaż, że jedyną funkcją ciągłą $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że $f(x+y) = f(x)f(y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ oraz $f(1) = e$, jest funkcja $f(x) = e^x$.
11. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i okresowa. Udowodnij, że funkcja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) \cdot x \cdot e^{-|x|}$ przyjmuje wartość największą i najmniejszą.
12. Funkcja $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, funkcja $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$g(x) = \sup\{f(t) : 0 \leq t \leq x\}.$$

Udowodnij, że funkcja g jest ciągła i niemalejąca.

13. Podaj przykład funkcji ograniczonej na przedziale $[0, 1]$, która
 - (a) nie przyjmuje swego kresu górnego i dolnego,
 - (b) nie przyjmuje kresu górnego i dolnego na żadnym przedziale $[a, b] \subset (0, 1)$.
14. Udowodnij, że funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ okresowa, ciągła i różna od stałej ma okres podstawowy (czyli minimalny okres dodatni).

Ciągłość funkcji II

Definicja. Niech $I \subset \mathbb{R}$ to przedział. Mówimy, że funkcja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ma *własność Darboux* (*własność przyjmowania wartości pośrednich*), jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in I$ i dowolnej liczby y leżącej pomiędzy $f(x_1)$ i $f(x_2)$ istnieje liczba t leżąca pomiędzy x_1 i x_2 i taka, że $f(t) = y$.

Tw. 1. Funkcja ciągła $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ma własność Darboux.

Przykład. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

ma własność Darboux, ale nie jest ciągła w 0.

Wniosek. Jeżeli funkcja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to dla każdego przedziału domkniętego $[c, d] \subset (a, b)$ jego obraz $f([c, d]) \subset \mathbb{R}$ również jest przedziałem domkniętym.

Wniosek. Każdy wielomian nieparzystego stopnia ma pierwiastek rzeczywisty.

Wniosek. Funkcja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła i różnowartościowa jest ściśle monotoniczna.

Tw. 2. Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem. Jeżeli funkcja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i różnowartościowa, to funkcja $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ jest ciągła.

Definicja (funkcje cyklometryczne).

(i) $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ to funkcja odwrotna do $\sin x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

(ii) $\arccos : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ to funkcja odwrotna do $\cos x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

(iii) $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ to funkcja odwrotna do $\operatorname{tg} x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

(iv) $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ to funkcja odwrotna do $\operatorname{ctg} x$, $x \in (0, \pi)$.

Stw. 3. Funkcje cyklometryczne są ciągłe.

1. Funkcja $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ jest ciągła. Udowodnij, że istnieje $c \in [0, 1]$ takie, że $f(c) = c$.
2. Funkcje $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe, $f(a) < g(a)$ i $f(b) > g(b)$. Udowodnij, że istnieje $c \in (a, b)$ takie, że $f(c) = g(c)$.
3. (a) Udowodnij, że równanie $2x = \sin x + 1$ ma rozwiązanie w przedziale $(0, 1)$.
(b) Udowodnij, że równanie $e^x = 3x$ ma co najmniej dwa rozwiązania.
(c) Udowodnij, że równanie $2^x = \frac{1}{x}$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.
4. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i malejąca. Udowodnij, że istnieje $c \in \mathbb{R}$ takie, że $f(c) = c$.
5. Funkcja $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i $f(0) = f(2)$. Udowodnij, że istnieją punkty $a, b \in [0, 2]$ takie, że $b - a = 1$ i $f(a) = f(b)$.

6. Funkcja $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągłą i nieograniczona z góry i z dołu. Udowodnij, że f przyjmuje każdą wartość nieskończenie wiele razy.
7. Podaj przykład funkcji ciągłej $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, która przyjmuje każdą wartość dokładnie trzy razy. Czy istnieje funkcja ciągła $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, która przyjmuje każdą wartość dokładnie dwa razy?
8. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i różnowartościowa i istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że n -ta iteracja funkcji f jest identycznością, czyli $f^n(x) = x$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że
(a) jeśli f jest rosnąca, to $f(x) = x$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$,
(b) jeśli f jest malejąca, to $f^2(x) = x$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.
9. Dana jest funkcja ciągła $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniająca warunki

$$f(1000) = 999, \quad f(x) \cdot f(f(x)) = 1 \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Oblicz $f(500)$.

10. Dana jest funkcja $f(x) = x^3 + x$, $x \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że f ma funkcję odwrotną i wyznacz granice

$$\lim_{x \rightarrow 0} f^{-1}(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(x)}{x}.$$

11. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2+x^6}}$, $x \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że f ma funkcję odwrotną i oblicz granicę

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y)}{\sqrt[3]{y}}.$$

12. Udowodnij, że jeśli $x > 0$, to $\operatorname{arctg} x < x < \arcsin x$.

13. Oblicz granice funkcji $\operatorname{arctg} x$ i $\operatorname{arctg} x$ w $\pm\infty$.

14. Oblicz granice

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}, \quad (c) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}.$$

15. Udowodnij tożsamości

$$(a) \cos(\arcsin x) = \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1, 1]$$

$$(b) \arccos x = \arcsin(\sqrt{1-x^2}), \quad x \in [0, 1]$$

$$(c) \arccos x = \frac{\arccos(2x^2-1)}{2}, \quad \arcsin x = \frac{\arccos(1-2x^2)}{2}, \quad x \in [0, 1]$$

$$(d) \sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(e) \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(f) \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \quad x > 0$$

Dowód zasadniczego twierdzenia algebry

Definicja. Ciąg liczb zespolonych (z_n) jest zbieżny do liczby zespolonej a wtedy i tylko wtedy, gdy $|z_n - a| \rightarrow 0$.

- $z_n \rightarrow a \iff \operatorname{Re}(z_n) \rightarrow \operatorname{Re}(a)$ i $\operatorname{Im}(z_n) \rightarrow \operatorname{Im}(a)$.
- Jeżeli $z_n \rightarrow a$, to $|z_n| \rightarrow |a|$.
- Z własności arytmetycznych granic ciągów liczb rzeczywistych wynikają identyczne własności arytmetyczne granic ciągów liczb zespolonych.

Stw. Z każdego ograniczonego ciągu liczb zespolonych można wybrać podciąg zbieżny.

Definicja. Zbiór $E \subset \mathbb{C}$ (lub $E \subset \mathbb{R}^2$ lub $E \subset \mathbb{R}$) jest *domknięty*, jeżeli dla każdego ciągu punktów $a_n \in E$ takiego, że $a_n \rightarrow a$ zachodzi $a \in E$.

Przykład: Koło $D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ jest zbiorem domkniętym.

Definicja. Funkcja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ jest ciągła w punkcie $a \in \mathbb{C}$, jeżeli dla dowolnego ciągu $z_n \rightarrow a$, $z_n \neq a$, zachodzi $f(z_n) \rightarrow f(a)$. Funkcja f jest ciągła, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie a .

Przykłady: Funkcja $f(z) = |z|$ jest ciągła. Jeżeli P jest wielomianem o zespolonych współczynnikach, to P jest funkcją ciągłą. Wówczas funkcja $g(z) = |P(z)|$ też jest ciągła.

Tw. Weierstrassa o kresach (wersja nad $\mathbb{C}$). Funkcja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, $E \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem domkniętym i ograniczonym. Wówczas istnieją $a, b \in E$ takie, że

$$f(a) = \inf_E f \quad \text{ i } \quad f(b) = \sup_E f.$$

Lemat. Niech $n \geq 1$, $P(z)$ jest wielomianem o zespolonych współczynnikach stopnia n . Wówczas istnieje $z_0 \in \mathbb{C}$ takie, że

$$|P(z_0)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|.$$

Zasadnicze tw. algebry. Każdy wielomian dodatniego stopnia o współczynnikach zespolonych ma pierwiastek zespolony.

Idea dowodu: Za pomocą Lematu pokazujemy, że $\inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)| = 0$.

Pochodna funkcji I

Definicja. Mówimy, że funkcja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in (a, b)$, jeżeli istnieje skończona granica

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Liczbę $f'(x_0)$ nazywamy *pochodną* funkcji f w punkcie x_0 . Wyrażenie $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ nazywamy *ilorazem różnicowym*.

Stosuje się także oznaczenie $f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$.

Stw. Jeżeli funkcja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in (a, b)$, to jest ona ciągła w tym punkcie.

Tw. (Arytmetyczne własności pochodnych) Jeżeli funkcje $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ są różniczkowalne w punkcie $x_0 \in (a, b)$, to

- (i) funkcja $f + g$ jest różniczkowalna w x_0 i $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;
- (ii) funkcja $f \cdot g$ jest różniczkowalna w x_0 i $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$;
- (iii) gdy $g(x) \neq 0$ na pewnym otoczeniu x_0 , to funkcja $\frac{f}{g}$ jest różniczkowalna w x_0 i $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

Lemat o przybliżaniu funkcją liniową. Funkcja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in (a, b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $k \in \mathbb{R}$ i funkcja $\phi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że

$$f(x) = f(x_0) + k \cdot (x - x_0) + \phi(x) \cdot (x - x_0) \quad \text{dla } x \in (a, b)$$

oraz $\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) = 0$. Wówczas $k = f'(x_0)$.

Tw. (Pochodna złożenia funkcji) Jeżeli funkcja $g : (a, b) \rightarrow (c, d)$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in (a, b)$ oraz funkcja $f : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $g(x_0) = y_0 \in (c, d)$, to funkcja $F = f \circ g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w x_0 i

$$F'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Definicja. Pochodne jednostronne funkcji f w punkcie x_0 definiujemy jako

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{pochodna prawostronna}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{pochodna lewostronna}$$

Jeżeli $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ i istnieje $f'_+(a)$ to mówimy, że f jest różniczkowalna w punkcie a i $f'(a) = f'_+(a)$. Podobnie definiujemy różniczkowalność i pochodną funkcji $g : (a, b]$ w punkcie b .

Stw. Funkcja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in (a, b)$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieją obie pochodne jednostronne funkcji f w punkcie x_0 , są skończone i są sobie równe.

Definicja. Niech $I \subset \mathbb{R}$ oznacza przedział, Mówimy, że funkcja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ jest *różniczkowalna*, jeżeli jest ona różniczkowalna w każdym punkcie $x_0 \in I$. Funkcję $x \rightarrow f'(x)$, $x \in (a, b)$, nazywamy *pochodną* funkcji f .

Stw. (Pochodne funkcji elementarnych)

- (i) $(x^a)' = ax^{a-1}$ dla $x \in \mathbb{R}$ i $a \in \mathbb{N}$ lub $x > 0$ i $a > 0$ lub $x \neq 0$ i $a \in \mathbb{Z}$ lub $x \neq 0$ i $a = \frac{1}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$;
- (ii) $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$ dla $a > 0$ i $x \in \mathbb{R}$;
- (iii) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ dla $x > 0$;
- (iv) $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$ dla $x \in \mathbb{R}$;
- (v) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ dla $x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$, $(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$ dla $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

1. Oblicz z definicji pochodną funkcji $f(x) = \sqrt{4x+1}$ w punkcie $x_0 = 2$.
2. Zbadaj różniczkowalność funkcji $f(x) = |x|$ i $g(x) = \sqrt[3]{x}$ w punkcie $x_0 = 0$.
3. Wyznacz dziedzinę funkcji, oblicz jej pochodną i wyznacz dziedzinę pochodnej:

- (a) $f(x) = \sqrt[4]{2x-x^2}$
- (b) $f(x) = \frac{x^2-2x+5}{x^4-9}$
- (c) $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^3}}$
- (d) $f(x) = \operatorname{tg}^4(\sin x)$

$$(e) f(x) = \left(\sqrt{x^2 + \sin^2 x} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x}} - 1\right)$$

- (f) $f(x) = \frac{\log_2(x^2-1)}{\arctg x}$
- (g) $f(x) = xe^{x^2} - 3 \cdot 2^{\cos x}$
- (h) $f(x) = x^x$
- (i) $f(x) = x^{x^x}$
- (j) $f(x) = (\sin \sqrt{x})^{\cos x}$
- (k) $f(x) = \log_x e$
- (l) $f(x) = \log_{x^2-1}(\cos x + 1)$

4. Niech $a > 0$ i

$$f(x) = \begin{cases} |x|^a \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{gdy } x \neq 0 \\ 0 & \text{gdy } x = 0 \end{cases}$$

Dla jakich wartości a funkcja f jest różniczkowalna w 0?

Pochodna funkcji II

Tw. (Pochodna funkcji odwrotnej) Jeżeli funkcja $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$ jest bijekcją, jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in (a, b)$, $f'(x_0) \neq 0$ i funkcja odwrotna $f^{-1} : (c, d) \rightarrow (a, b)$ jest ciągła w punkcie $y_0 = f(x_0)$, to funkcja f^{-1} jest różniczkowalna w punkcie $y_0 = f(x_0)$ i

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Pochodne funkcji cyklometrycznych:

- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1)$
- $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1)$
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$.

Lemat Fermata. Jeżeli funkcja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $c \in (a, b)$ i ma w tym punkcie ekstremum lokalne, to $f'(c) = 0$.

Tw. Rolle'a. Funkcja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a, b]$ i różniczkowalna na (a, b) . Jeżeli $f(a) = f(b)$, to istnieje $\xi \in (a, b)$ takie, że $f'(\xi) = 0$.

1. Określ parametry a, b, c, d tak, aby funkcja f miała pochodną na całym zbiorze liczb rzeczywistych:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{dla } x \leq 1, \\ ax^2 + c & \text{dla } 1 < x \leq 2, \\ \frac{dx^2 + 1}{x} & \text{dla } x \geq 2. \end{cases}$$

2. Podaj przykład funkcji różniczkowalnej, której pochodna nie jest ciągła.
3. Liczba x_0 jest k -krotnym pierwiastkiem wielomianu P i $k > 1$. Wykaż, że x_0 jest $(k-1)$ -krotnym pierwiastkiem wielomianu P' .
4. Funkcja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w $x_0 \in (a, b)$. Wykaż, że

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = f'(x_0).$$

Czy z istnienia powyższej granicy wynika różniczkowalność funkcji f w x_0 ?

5. Znajdź wzory dla sum (a) $\sum_{k=1}^n kx^{k-1}$, (b) $\sum_{k=1}^n ke^{kx}$.

6. Funkcje f i g są różniczkowalne w punkcie a . Oblicz granice

$$(a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a},$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x - a},$$

7. Funkcje $f_1, f_2, \dots, f_k : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ są różniczkowalne w punkcie $x_0 \in (a, b)$. Znajdź wzór na $(f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_k)'(x_0)$.
8. Wyznacz pochodne funkcji $f(x) = \sqrt[3]{x}$ i $g(x) = \ln x$ korzystając z tw. o pochodnej funkcji odwrotnej.
9. Oblicz pochodne

$$(a) f(x) = \sin(\arccos x)$$

$$(c) f(x) = \operatorname{arctg}(e^{5x})$$

$$(b) f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$$

$$(d) f(x) = \ln^3(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2})$$

10. Wielomian W o współczynnikach rzeczywistych ma n różnych pierwiastków rzeczywistych. Wykaż, że wielomian W' ma co najmniej $n-1$ różnych pierwiastków rzeczywistych.
11. Funkcja $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a, +\infty)$ i różniczkowalna na $(a, +\infty)$ oraz $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(a)$. Wykaż, że istnieje $\xi \in (a, +\infty)$ takie, że $f'(\xi) = 0$.
12. Wielomian P stopnia n ma n różnych pierwiastków rzeczywistych. Wykaż, że dla dowolnej liczby $a \neq 0$ wielomian $P'(x) + aP(x)$ ma n różnych pierwiastków rzeczywistych.

Powtórzenie

1. Czy można określić $f(0)$ tak, aby otrzymać funkcję ciągłą $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, jeśli dla $x \neq 0$ (a) $f(x) = \exp(\frac{1}{x})$, (b) $f(x) = \exp(\frac{1}{x^2})$, (c) $f(x) = \exp(-\frac{1}{x^2})$?

2. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{e^{2\arctg x} - 1} & \text{gdy } x \neq 0, \\ a & \text{gdy } x = 0. \end{cases}$$

Dla jakich wartości $a \in \mathbb{R}$ funkcja f jest ciągła?

3. Czy funkcja $f(x) = e^{-|x|} \sin x$ przyjmuje na $\mathbb{R}$ wartość największą i najmniejszą?

4. Udowodnij, że

(a) równanie $e^{\sin x} = 2 \cos x$ ma co najmniej 2 rozwiązania w przedziale $(0, 2\pi)$

(b) równanie $10\sqrt{x} = e^x$ ma co najmniej 2 rozwiązania w przedziale $(0, +\infty)$.

5. Funkcja $f : [0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ jest dana wzorem $f(x) = \sin x + \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$. Wyznacz obraz funkcji f i udowodnij, że istnieje funkcja odwrotna $f^{-1} : f([0, \frac{\pi}{2})) \rightarrow [0, \frac{\pi}{2})$. Oblicz granice

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f^{-1}(x) \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f^{-1}(x)}{x - 1}.$$

6. Oblicz pochodną funkcji we wszystkich punktach, w których istnieje:

$$(a) \arcsin \frac{1 - e^{-x^2}}{1 + e^{-x^2}}, \quad (b) \sin^2(\sqrt{x}), \quad (c) \frac{\ln(\arctg(e^x) + \sqrt[3]{\sin x})}{\cosh(\arctg x)}.$$

7. Wyznacz wszystkie pary liczb rzeczywistych a, b takie, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} ax + b \cos x & \text{dla } x \geq 0 \\ \frac{1 - \cos x}{x \sin x} & \text{dla } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna na przedziale $(-\pi, \infty)$.

8. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest dana wzorem $f(x) = x + \sin x$.

(a) Udowodnij, że f jest bijekcją. Czy funkcja f^{-1} jest ciągłą?

(b) Wyznacz wszystkie $y \in \mathbb{R}$ takie, że funkcja f^{-1} jest różniczkowalna w y .

(c) Oblicz $(f^{-1})'(0)$ i $(f^{-1})'(\frac{1}{2}\pi + 1)$.

9. Udowodnij, że funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + x$, ma różniczkowalną funkcję odwrotną. Wyznacz $f^{-1}(1)$ i $(f^{-1})'(1)$.

Pochodna funkcji III

Tw. 1 (Cauchy'ego o wartości średniej). Funkcje $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe na $[a, b]$ i różniczkowalne na (a, b) oraz $g'(x) \neq 0$ dla $x \in (a, b)$. Wówczas istnieje $\xi \in (a, b)$ takie, że

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Tw. 2 (Lagrange'a o wartości średniej). Funkcja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a, b]$ i różniczkowalna na (a, b) . Wówczas istnieje $\xi \in (a, b)$ takie, że

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Wniosek 3. Funkcja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a, b]$ i różniczkowalna na (a, b) oraz $f'(x) = 0$ dla każdego $x \in (a, b)$. Wówczas funkcja f jest stała.

Tw. 4. Załóżmy, że funkcja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a, b]$ i różniczkowalna na (a, b) .

- (i) Jeżeli $f'(x) \geq 0$ dla $x \in (a, b)$, to funkcja f jest niemalejąca.
- (ii) Jeżeli $f'(x) > 0$ dla $x \in (a, b)$, to funkcja f jest rosnąca.
- (iii) Jeżeli $f'(x) \leq 0$ dla $x \in (a, b)$, to funkcja f jest nierosnąca.
- (iv) Jeżeli $f'(x) < 0$ dla $x \in (a, b)$, to funkcja f jest malejąca.

Tw. 5. Załóżmy, że funkcja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, $c \in (a, b)$ oraz $f'(c) = 0$

- (i) Jeżeli istnieje $\delta > 0$ takie, że $f'(x) \leq 0$ dla $x \in (c - \delta, c)$ i $f'(x) \geq 0$ dla $x \in (c, c + \delta)$, to f ma w c minimum lokalne.
- (ii) Jeżeli istnieje $\delta > 0$ takie, że $f'(x) \geq 0$ dla $x \in (c - \delta, c)$ i $f'(x) \leq 0$ dla $x \in (c, c + \delta)$, to f ma w c maksimum lokalne.

Jeżeli nierówności są ostre, to odp. ekstrema są właściwe.

1. Funkcje $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe na $[a, b]$ i różniczkowalne na (a, b) oraz $f(a) = f(b) = 0$. Udowodnij, że istnieje $\xi \in (a, b)$ takie, że

$$g'(\xi)f(\xi) + f'(\xi) = 0.$$

2. Liczby rzeczywiste $a_0, a_1, \dots, a_n$ spełniają równość $a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = 0$. Udowodnij, że wielomian $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ ma pierwiastek w przedziale $(0, 1)$.

3. Udowodnij, że $\arctg x + \arctg \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4}$ jeśli $x > -1$.

4. Niech $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ oraz $b_j \neq b_i$ dla $i \neq j$. Udowodnij, że równanie

$$a_1 x^{b_1} + a_2 x^{b_2} + \dots + a_n x^{b_n} = 0$$

ma co najwyżej $n - 1$ pierwiastków dodatnich.

5. Funkcja $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna oraz $\inf f' > 0$. Udowodnij, że $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$.

6. Udowodnij nierówności:

$$(a) |\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y| \geq |x - y| \text{ dla } x, y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2});$$

$$(b) |\arctg x - \arctg y| \leq |x - y| \text{ dla } x, y \in \mathbb{R};$$

$$(c) \frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b} \text{ dla } 0 < b < a.$$

7. Stosując tw. Cauchy'ego o wartości średniej udowodnij nierówności:

$$(a) 1 - \frac{x^2}{2!} < \cos x \text{ dla } x \neq 0, \quad (c) \cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \text{ dla } x \neq 0,$$

$$(b) x - \frac{x^3}{3!} < \sin x \text{ dla } x > 0, \quad (d) \sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \text{ dla } x > 0.$$

8. Funkcja $f : (a, +\infty)$ jest różniczkowalna i $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = c$. Udowodnij, że $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = c$.

9. Udowodnij, że dla $x \geq -1$ zachodzą nierówności Bernoulliego:

$$(a) (1+x)^r \geq 1+rx \text{ dla } r \geq 1; \quad (b) (1+x)^r \leq 1+rx \text{ dla } 0 \leq r \leq 1.$$

10. Udowodnij nierówności:

$$(a) 2x \arctg x \geq \ln(1+x^2), x \in \mathbb{R}; \quad (e) x e^{x/2} < e^x - 1, x > 0;$$

$$(b) \ln(1+x) > \frac{\arctg x}{1+x}, x > 0; \quad (f) e^x < (1+x)^{1+x}, x > 0;$$

$$(c) \ln x \leq \frac{x}{e}, x > 0; \quad (g) \ln(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}, x > 0;$$

$$(d) \cos x < \frac{\sin^2 x}{x^2}, 0 < x < \frac{\pi}{2}; \quad (h) \left(\frac{x+1}{2}\right)^{x+1} \leq x^x, x > 0;$$

11. Wyznacz przedziały monotoniczności, ekstrema lokalne i kresy funkcji

$$(a) f(x) = x e^{-x^2}, \quad (b) f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1}, \quad (c) f(x) = \sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt[5]{x^2 - 2x + 1}.$$

12. Która z liczb jest większa: e^π czy π^e ?

13. Wykaż, że jeśli $x, y \geq 0$ i $\alpha \geq 1$, to $(x+y)^\alpha \geq x^\alpha + y^\alpha$.

14. Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b takich, że $a \neq b$ zachodzą nierówności

$$\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2}.$$

Liczbę $\frac{b-a}{\ln b - \ln a}$ nazywamy *średnią logarytmiczną* liczb a i b .

Pochodna funkcji IV

Tw. 1. Funkcja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna. Wówczas funkcja f' ma własność Darboux.

Tw. 2. (Reguła de l'Hospitala) Niech $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Funkcje $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ są różniczkowalne, $g'(x) \neq 0$ dla $x \in (a, b)$,

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} g(x) = 0 \quad \text{lub} \quad \lim_{x \rightarrow b} g(x) = +\infty$$

oraz istnieje granica

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = C \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Wówczas

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = C.$$

Lemat. Niech $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $b \in \mathbb{R} \cup +\infty$ i dla każdego ciągu rosnącego $(x_n)_n$ takiego, że $x_n \rightarrow b$ zachodzi $f(x_n) \rightarrow c$. Wówczas $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = c$.

1. Okno na poddaszu ma mieć kształt trapezu równoramiennego, którego krótsza podstawa i ramiona mają długość po 40 cm. Jaką długość powinna mieć dłuższa podstawa tego trapezu, aby okno miało największe pole powierzchni?

2. Rozpatrujemy wszystkie stożki, których przekrojem osiowym jest trójkąt o obwodzie 20. Oblicz wysokość i promień podstawy tego stożka, którego objętość jest największa.

3. Parabola o równaniu $y = 2 - \frac{x^2}{2}$ przecina oś OX w punktach A i B . Rozpatrujemy wszystkie trapezy $ABCD$ takie, że punkty C i D leżą na tej paraboli w górnej połowie układu współrzędnych. Znajdź współrzędne punktów C i D , dla których pole trapezu $ABCD$ jest największe.

4. Trójkąty prostokątne o obwodzie 1 obracamy wokół przeciwprostokątnej. Czy dla któregoś z nich objętość otrzymanej bryły będzie największa? Jeśli tak, to znajdź tę największą objętość.

5. Korzystając z reguły de l'Hospitala (lub nie), oblicz granice:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - x}{\sin x - 2x},$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{\sin x - x},$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3},$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x},$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg} x,$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{2x - 1},$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi - 2 \arctg x) \ln x,$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin x - \cos x},$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2},$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{2 \sin^2 x - 1},$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}},$$

$$(l) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}},$$

$$(m) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)\right),$$

$$(n) \lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} + x)^{\frac{1}{x}},$$

$$(o) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3 x}\right),$$

$$(p) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1},$$

$$(q) \lim_{x \rightarrow 1} (2 - x) \operatorname{tg}(\pi x/2),$$

$$(r) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x + x) \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e\right)$$

6. Wyznacz granice w zależności od $a > 0$.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^a},$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^a},$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x^a}.$$

7. Niech $f(x) = x - \sin x$, $g(x) = 2x + \sin x$. Znajdź granicę $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ i wykaż, że

granica $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ nie istnieje.

8. Oblicz granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin(x^4)} - \cos(x^2)}{(\operatorname{tg} x - \sin x)(\ln(1 + \arcsin x))}.$$

9. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, granica $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ istnieje i jest skończona oraz istnieje granica $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f'(x)$. Udowodnij, że $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f'(x) = 0$.

10. Funkcja $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, $a > 0$ oraz

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (a f(x) + f'(x)) = b \in \mathbb{R}.$$

Udowodnij, że $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{b}{a}$.

11. Dla danej liczby $\lambda \geq 1$ niech $f(\lambda)$ oznacza (jedyne) rozwiązanie równania $x(1 + \ln x) = \lambda$. Udowodnij, że

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\ln \lambda \cdot f(\lambda)}{\lambda} = 1.$$

Funkcje wypukłe

Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie przedziałem, półprostą lub prostą. Mówimy, że funkcja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ jest *wypukła*, jeżeli dla wszystkich $x, y \in I$ i dowolnego $\lambda \in (0, 1)$ zachodzi nierówność

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y),$$

zwana *nierównością Jensena*. Jeżeli ta nierówność jest ostra dla dowolnych x, y, t j.w. to mówimy, że f jest *ściśle wypukła*. Jeżeli nierówność Jensena zachodzi w przeciwną stronę, to mówimy, że f jest *wklęsła*.

Uwaga: Funkcja f jest (ściśle) wypukła wtw. gdy $-f$ jest (ściśle) wklęsła.

Interpretacja geometryczna. Funkcja f jest ściśle wypukła wtw. gdy każda cięciwa łącząca dwa punkty należące do wykresu f leży nad tym wykresem.

Tw. 1. (Nierówność Jensena) Jeżeli $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ jest wypukła, $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$, $t_1, t_2, \dots, t_n \in [0, 1]$ i $t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1$, to

$$f\left(\sum_{k=1}^n t_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n t_k f(x_k).$$

Stw. 2. Funkcja wypukła $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła.

Lemat. Funkcja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ jest wypukła wtw. gdy dla dowolnych $x, c, y \in I$, $x < c < y$ zachodzi nierówność

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq \frac{f(y) - f(c)}{y - c}.$$

W przypadku funkcji ściśle wypukłych nierówność jest ostra.

Tw. 3. Funkcja różniczkowalna $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest wypukła (ściśle wypukła) wtw. gdy funkcja f' jest niemalejąca (ściśle rosnąca). Funkcja f jest wklęsła (ściśle wklęsła) wtw. gdy f' jest nierosnąca (ściśle malejąca).

Wniosek. Funkcja 2-krotnie różniczkowalna $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest wypukła (ściśle wypukła) wtw. gdy funkcja f'' jest nieujemna (dodatnia); f jest wklęsła (ściśle wklęsła) wtw. gdy f'' jest niedodatnia (ujemna).

1. Udowodnij, że funkcja $f(x) = x^2$ jest wypukła.

2. Korzystając z wypukłości funkcji $f(x) = x^2$ udowodnij nierówność Cauchy'ego - Schwarza.

3. Zbadaj, na jakich przedziałach są wklęsłe / wypukłe funkcje (a) $f(x) = xe^x$, (b) $\sin x$, (c) $\operatorname{tg} x$, (d) $f(x) = x^4 - 7x^2 + 6x$ (e) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$

4. Jak jest maksymalna liczba przedziałów wklęsłości / wypukłości wielomianu stopnia n ?

5. Wykaż, że funkcja $f(x) = \sqrt{1+x^2} - \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$ jest rosnąca i wklęsła na $(0, +\infty)$

6. **Uogólniona nierówność Cauchy'ego:** Niech $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n > 0$ i $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$. Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \geq x^{\alpha_1} \cdot x^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x^{\alpha_n}.$$

7. Niech $a > 1$ i $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$. Wykaż, że

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)^a \leq \frac{x_1^a + x_2^a + \dots + x_n^a}{n}.$$

8. Udowodnij **Nierówność Younga:** Jeśli $p, q > 1$ i $p^{-1} + q^{-1} = 1$, to dla dowolnych $x, y \geq 0$

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

9. Udowodnij **Nierówność Höldera:** Jeśli $n \in \mathbb{N}$, $p, q > 1$ i $p^{-1} + q^{-1} = 1$, to dla dowolnych $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ spełniona jest nierówność

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^n y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Oblicz granicę prawej strony, gdy $p \rightarrow +\infty$.

10. Stosując nierówność Höldera udowodnij, **nierówność Minkowskiego:** Jeśli $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ i $p \geq 1$, to

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

11. Niech $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Wykaż, że

$$1 + \sqrt[4]{e^a e^b e^c e^d} \leq \sqrt[4]{(1+e^a)(1+e^b)(1+e^c)(1+e^d)}.$$

12. Niech $x, y, z \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Wykaż, że

$$\left(1 - \operatorname{tg}\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\right)^3 \geq (1 - \operatorname{tg} x)(1 - \operatorname{tg} y)(1 - \operatorname{tg} z).$$

13. $I \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem i funkcja ciągła $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} \quad \text{dla dowolnych } x, y \in I.$$

Udowodnij, że funkcja f jest wypukła.

14. Funkcja $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest wypukła i $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$. Udowodnij, że funkcja $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ jest rosnąca na $(0, +\infty)$.

Pochodne wyższych rzędów

Definicja. Załóżmy, że $I \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem i $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Pochodną rzędu 0 funkcji f nazywamy samą funkcję f . Możemy pisać $f^{(0)} = f$.

Pochodną rzędu n funkcji f w punkcie $a \in I$ definiujemy jako pochodną funkcji $f^{(n-1)}$ w punkcie a , czyli

$$f^{(n)}(a) = (f^{(n-1)})'(a).$$

Jeżeli ta pochodna (jako odp. granica) istnieje, to mówimy, że funkcja f jest n -krotnie różniczkowalna w punkcie a . Jeżeli funkcja f jest n -krotnie różniczkowalna w każdym punkcie $x \in I$, to mówimy, że jest ona n -krotnie różniczkowalna (na przedziale I). Funkcję $x \mapsto f^{(n)}(x)$, ($x \in I$) nazywamy wówczas n -tą pochodną funkcji f lub pochodną rzędu n funkcji f .

Stw. 1. (Wzór Leibniza) Załóżmy, że funkcje $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ są n -krotnie różniczkowalne w punkcie $a \in I$. Wówczas

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a).$$

Tw. 2. (Wzór Taylora z resztą Lagrange'a) Funkcja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest $(n+1)$ -krotnie różniczkowalna na przedziale (a, b) i $c \in (a, b)$. Wówczas dla dowolnego $x \in (a, b)$, istnieje punkt ξ leżący pomiędzy c i x , że

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1}.$$

Uwaga: Występujący w powyższym wzorze wielomian $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k$ nazywamy n -tym wielomianem Taylora funkcji f w punkcie c , funkcję $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ nazywamy n -tą resztą Taylora funkcji f w punkcie c .

Tw. 3. (Wzór Taylora z resztą Peano) Funkcja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest $(n-1)$ -krotnie różniczkowalna na przedziale (a, b) i n -krotnie różniczkowalna w punkcie $c \in (a, b)$. Wówczas dla $x \in (a, b)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k + r(x), \quad \text{gdzie } \lim_{x \rightarrow c} \frac{r(x)}{(x-c)^n} = 0.$$

1. Wyznacz funkcję $f^{(n)}(x)$ dla (a) $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R}$, (b) $f(x) = \ln(a+x)$, $a > 0$, (c) $f(x) = e^{ax}$, $a \neq 0$, (d) $f(x) = \sin(ax)$, $a \neq 0$, (e) $f(x) = \log_a(x)$, $a > 0$, (f) $f(x) = a^x$, $a > 0$.

2. Oblicz n -tą pochodną funkcji (a) $f(x) = xe^x$, (b) $g(x) = x^2 \sin(x)$.

3. Niech

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Wykaż, że $f^{(n)}(0) = 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i $f^{(n)}(x) = e^{-1/x^2} P_n(1/x)$ dla $x \neq 0$, gdzie P_n jest wielomianem o współczynnikach całkowitych.

4. **Wielomiany Hermite'a.** Niech $f(x) = e^{-x^2}$ i dla $n = 0, 1, 2, \dots$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \cdot f^{(n)}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

(a) Wykaż, że dla $n = 0, 1, 2, \dots$ funkcja H_n jest wielomianem stopnia n .

(b) Udowodnij zależność rekurencyjną $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$.

5. Załóżmy, że P jest wielomianem stopnia n . Udowodnij, że dla dowolnych $c, x \in \mathbb{R}$

$$P(x) = P(c) + \frac{P'(c)}{1!} (x-c) + \frac{P''(c)}{2!} (x-c)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n.$$

Wyznacz k -ty wielomian Taylora wielomianu P w punkcie c .

6. Udowodnij, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ prawdziwe są wzory:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

7. Wyznacz n -ty wielomian i resztę Taylora w zerze funkcji z zadania 4.

8. Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej $x > 0$ zachodzą nierówności

$$(a) \quad 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x.$$

$$(b) \quad x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

9. Znajdź przybliżenie wymierne liczby $\sqrt{e}$ z dokładnością 10^{-3} .

10. Udowodnij, że

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

11. Wykaż, że dla $n \in \mathbb{N}$ i $x \geq 0$

$$e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \leq \frac{xe^x}{n}.$$

12. Funkcja f jest różniczkowalna na przedziale $[0, 1]$, $f(0) = f(1) = 0$ i funkcja f'' istnieje na przedziale $(0, 1)$ i $|f''(x)| \leq A$ dla każdego $x \in (0, 1)$. Udowodnij, że

$$|f'(x)| \leq \frac{A}{2} \quad \text{dla } x \in [0, 1].$$

Powtórzenie

1. Sformułuj i udowodnij tw. Cauchy'ego o wartości średniej.
2. Podaj definicję funkcji wypukłej. Sformułuj i dowodnij nierówność Jensena dla funkcji wypukłych.
3. Zbadaj przebieg zmienności funkcji i wyznacz ich ekstrema lokalne oraz kresy.

(a) $f(x) = (x^2 - 2x) \cdot \ln x - \frac{3}{2}x^2 + 4x,$

(b) $f(x) = \frac{\sqrt{|x^2 - 2|}}{x^2 + x + 1}$

4. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x^2 + bx + 3}{\sqrt{1 + x^2}}$. Wyznacz liczbę i rodzaj ekstremów funkcji f w zależności od parametru $b \in \mathbb{R}$.

5. Udowodnij nierówności:

(a) $\sqrt[3]{1+x} > 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2, x > 0,$

(b) $\frac{2}{2x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}, x > 0,$

(c) $\sin(\operatorname{tg} x) \geq x, x \in [0, \frac{1}{4}\pi].$

(d) $x^3 - \frac{x^5}{10} < 3 \sin x - 3x \cos x < x^3, x \in (0, \frac{1}{2}\pi).$

6. Funkcja różniczkowalna $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ma własność

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Udowodnij, że istnieje ciąg $x_n \rightarrow +\infty$ taki, że $f'(x_n) \rightarrow 0$.

7. Oblicz granice

(a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1},$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right)^x,$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x^2+1}}{x-1},$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \sin x)^{\frac{1}{x}},$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{ctg} x - 1}{x^2}.$

8. Oblicz n -tą pochodną funkcji $f(x) = (x^3 + x^2)e^{2x}$.

9. Udowodnij, że dla $x \in \mathbb{R}$

$$\ln(1 + e^x) \leq \ln 2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{24}x^2,$$

10. Wyznacz przedziały wklęsłości i wypukłości funkcji

(a) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

(b) $f(x) = x + \sin x$

(c) $f(x) = xe^{-x^2}$

11. Niech $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ i $a = x_1 + x_2 + \dots + x_n$. Udowodnij nierówność

$$a \cdot \operatorname{arctg} \frac{a}{n} \leq \sum_{k=1}^n x_k \cdot \operatorname{arctg} x_k.$$

12. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich u, v zachodzi nierówność

$$\frac{\sqrt[3]{uv}}{1 + \sqrt[3]{uv}} \geq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{u}{1+u} + \frac{v}{1+v} \right).$$

Wskazówka: każda liczba dodatnia jest postaci e^x .

Całka nieoznaczona I

Operacja odwrotna do różniczkowania funkcji nazywana jest *całkowaniem*: mając daną funkcję f szukamy funkcji F takiej, że $F' = f$. Niestety, w odróżnieniu od różniczkowania, które w zasadzie jest czynnością mechaniczną, całkowanie funkcji bywa trudne, wymaga pomysłowości i nie zawsze jest wykonalne.

Definicja. Załóżmy, że zbiór $D \subset \mathbb{R}$ jest sumą rozłącznych przedziałów i dana jest funkcja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Każdą funkcję $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że dla każdego $x \in D$ zachodzi $F'(x) = f(x)$ nazywamy *całką nieoznaczoną* lub *funkcją pierwotną* funkcji f . Piszemy

$$F(x) = \int f(x) dx.$$

Najważniejsze funkcje pierwotne:

$\int x^a dx = \frac{1}{1+a} x^{a+1} + C$ dla $a \neq -1$ i każdego x , dla którego określona jest funkcja x^a ,
 $\int e^x dx = e^x + C$, $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$, $\int \cos x dx = \sin x + C$, $\int \sin x dx = -\cos x + C$,
 $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x + C$, $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$, $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tg x + C$,
 $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\ctg x + C$.

Występująca w powyższych wzorach stała C jest nazywana *stałą całkowania*. Jeżeli dziedzina funkcji składa się z kilku przedziałów rozłącznych, na każdym przedziale wartość stałej całkowania może być inna.

Tw. 1. Jeżeli $I \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem i funkcja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to funkcja f ma funkcję pierwotną. (dowód pomijamy)

Stw. 2. Jeżeli $I \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ i F jest funkcją pierwotną funkcji f , to F jest funkcją ciągłą.

Stw. 3. (liniowość całki). Jeżeli funkcje $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ mają funkcje pierwotne i $a, b \in \mathbb{R}$, to

$$\int (af(x) + bg(x)) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx.$$

Stw. 4. (podstawienie liniowe). Jeżeli $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ oraz $\int f(x) dx = F(x) + C$, to

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C.$$

Tw. 5. (Wzór na całkowanie przez części). Jeżeli funkcje $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ są różniczkowalne, to

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx.$$

Oblicz całki nieoznaczone:

$$1. \int (x^4 + 2x^3 - x^2 - 7) dx,$$

$$2. \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx,$$

$$3. \int \cos^2 x dx, \int \sin^2 x dx$$

$$4. \int (4 \sin(5x) - 5 \cos(4x)) dx,$$

$$5. \int |x| dx,$$

$$6. \int \sqrt{|x|} dx,$$

$$7. \int a^x dx, a > 0,$$

$$8. \int \frac{1}{3-2x} dx,$$

$$9. \int \frac{1}{4+9x^2} dx,$$

$$10. \int \frac{1}{1-x^2} dx.$$

$$11. \int \ln_a x dx, a > 0,$$

$$12. \int x e^x dx,$$

$$13. \int \sin x \cdot e^x dx,$$

$$14. \int x^2 e^{-x} dx,$$

$$15. \int \ln^2 x dx,$$

$$16. \int x^3 \sin x dx,$$

$$17. \int x \cos^2 x dx,$$

$$18. \int x^2 \cos^2 x dx,$$

$$19. \int \sin^3 x dx,$$

$$20. \int x \arctg x dx,$$

$$21. \int x \sin x e^x dx,$$

$$22. \int \cos(\ln x) dx,$$

23. Załóżmy, że $I \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem i funkcja $f : I \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jest różniczkowalna. Udowodnij, że

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C.$$

Oblicz całki nieoznaczone:

$$24. \int \tg x dx$$

$$25. \int \frac{x}{1+x^2} dx,$$

$$26. \int \frac{x^2}{1-x^3} dx,$$

$$27. \int \frac{e^x}{3+e^x} dx,$$

$$28. \int \frac{1}{x \ln x} dx,$$

$$29. \int \frac{1}{\arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2}} dx.$$

Całka nieoznaczona II

Funkcje hiperboliczne. Przypomnijmy:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Łatwo wyprowadzić tożsamości

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 & (\text{tzw. jedynka hiperboliczna}), \\ \cosh(2x) &= 2 \sinh^2 x - 1, \\ \sinh(2x) &= 2 \cosh x \cdot \sinh x. \end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić, że $\int \sinh x \, dx = \cosh x + C$ i $\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$.

Sinus i cosinus hiperboliczny mają funkcje odwrotne:

$$\operatorname{arsinh} y = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}), \quad y \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{arcosh} y = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}), \quad y \geq 1$$

oraz

$$(\operatorname{arsinh} y)' = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}}, \quad (\operatorname{arcosh} y)' = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}, \quad y > 1.$$

Mamy więc kolejne ważne funkcje pierwotne:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \operatorname{arsinh} x + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{arcosh} x + C.$$

Tw. o całkowaniu przez podstawienie. Załóżmy, że funkcja f jest ciągła, funkcja g jest różniczkowalna i g' jest ciągła, oraz F jest funkcją pierwotną funkcji f . Wówczas

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = F(g(x)) + C.$$

Do całkowania funkcji wymiernych przydatne jest twierdzenie:

Tw. o rozkładzie funkcji wymiernej na ułamki proste. Każda funkcja wymierna F jest sumą pewnego wielomianu i pewnej liczby ułamków prostych, czyli funkcji wymiernych postaci

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \quad A, a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}, \quad \frac{Ax+B}{((x-a)^2+b^2)^k}, \quad A, B, a \in \mathbb{R}, b > 0, k \in \mathbb{N}.$$

Mianowniki tych ułamków prostych są dzielnikami mianownika F .

1. Oblicz całki, stosując tw. o całkowaniu przez podstawienie:

- | | |
|---|--|
| (a) $\int x e^{-x^2} \, dx$ | (i) $\int \sqrt{x^2 - 1} \, dx$ |
| (b) $\int x \sqrt{4 - x^2} \, dx$ | (j) $\int \sqrt{1 + x^2} \, dx$ |
| (c) $\int \frac{dx}{(1 + x^2)^2}$ | (k) $\int \frac{dx}{\cosh x},$ |
| (d) $\int \frac{dx}{\cos x}$ | (l) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^{2x}}},$ |
| (e) $\int e^{\sqrt{x}} \, dx$ | (m) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}}$ |
| (f) $\int \frac{\ln^5 x}{x} \, dx$ | (n) $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{3/2}},$ |
| (g) $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$ | (o) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})}.$ |
| (h) $\int \sqrt{1 - x^2} \, dx$ | |

2. Oblicz całki

$$\int \arcsin x \, dx, \quad \int \operatorname{arsinh} x \, dx, \quad \int \frac{dx}{\cosh^2 x}.$$

3. Oblicz całki z funkcji wymiernych:

- | | |
|------------------------------------|--------------------------------------|
| (a) $\int \frac{dx}{1 + x^3}$ | (d) $\int \frac{dx}{x^4 + 4}$ |
| (b) $\int \frac{dx}{x + x^3}$ | (e) $\int \frac{x^3}{x^4 + 1} \, dx$ |
| (c) $\int \frac{x}{1 + x^3} \, dx$ | (f) $\int \frac{x^2}{1 - x^4} \, dx$ |

Całka nieoznaczona III

Oblicz całki nieoznaczone:

1. $\int x \cos^2 x \, dx,$

2. $\int \sin(\ln x) \, dx,$

3. $\int x \ln(x^2 + 1) \, dx,$

4. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} \, dx,$

5. $\int \frac{1 + \sqrt{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x} \, dx,$

6. $\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \, dx,$

7. $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx,$

8. $\int \frac{1}{1 + \sin x} \, dx,$

9. $\int \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} \, dx.$

10. $\int \frac{1}{x^2 + x + 2} \, dx,$

11. $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x} \, dx,$

12. $\int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} e^x \, dx,$

13. $\int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx,$

14. $\int \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{1 + x^2} \, dx,$

Całka Newtona

Definicja. Niech $a < b$ i $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. *Całka Newtona (całka oznaczona)* funkcji f na przedziale $[a, b]$ jest to liczba

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

gdzie F oznacza dowolną funkcję pierwotną funkcji f . Ten sam wzór uznajemy za definicję całki oznaczonej w przypadku $a > b$.

Stw. 1. (Liniowość całki Newtona) Jeżeli funkcje $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, to $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$.

Stw. 2. (Wzór na całkowanie przez części) Jeżeli funkcje $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ są różniczkowalne i funkcje f', g' są ciągłe, to

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

Stw. 3. (Wzór na całkowanie przez podstawienie) Niech $g : [a, b] \rightarrow I \subset \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną taką, że funkcja g' jest ciągła i $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wówczas

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt = F(g(b)) - F(g(a)),$$

gdzie F oznacza dowolną funkcję pierwotną funkcji f .

Stw. 4. (Monotoniczność całki) Jeżeli funkcje $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe i $f \geq g$ na $[a, b]$, to $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

Stw. 5. (Tw. o wartości średniej dla całek) Jeżeli funkcja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to dla pewnego $\xi \in (a, b)$ zachodzi $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(\xi)$.

Tw. 6. (Przybliżanie całki sumami całkowymi) Niech $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, $\varepsilon > 0$. Wówczas istnieje $\delta > 0$, że dla dowolnych punktów $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ takich, że $x_i - x_{i-1} < \delta$ dla $i = 1, 2, \dots, n$ oraz $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ zachodzi

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon.$$

Interpretacja geometryczna całki Newtona: Jeżeli $f : [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$ jest funkcją ciągłą, to całka $\int_a^b f(x) dx$ jest równa polu pod wykresem funkcji f .

- Oblicz całki (a) $\int_{1/e}^e \ln x dx$, (b) $\int_0^\pi x \sin x dx$, (c) $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x dx$, (d) $\int_{-1}^2 x e^{x^2} dx$.
- Znajdź wzory rekurencyjne dla całek $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$, $\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$, $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$.
- Funkcja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła. Udowodnij nierówności

$$(b-a) \inf_{[a,b]} f \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b-a) \sup_{[a,b]} f, \quad \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

- Funkcja $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła. Wykaż, że
(a) jeśli f jest parzysta, to $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$,
(b) jeśli f jest nieparzysta, to $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.
- Funkcja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła. Udowodnij równości
(a) $\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$, (b) $\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx$.
- Oblicz całkę $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$.
- Udowodnij, że $\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$ dla $m, n \in \mathbb{N}$.
- Udowodnij nierówność $\frac{17}{18} < \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx < \frac{17}{18} + \frac{1}{600}$.
- Funkcja f jest ciągła na pewnym przedziale zawierającym liczbę a . Udowodnij, że $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x) dx = f(a)$.
- Oblicz granice (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_1^x \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}} \right) dt$, (b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \int_x^1 \frac{\cos^2 t}{t^2} dt$,
(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^{\frac{1}{x^2}}$, (d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^{\frac{1}{x^2}}$.
- Udowodnij następujące uogólnienie tw. o wartości średniej dla całek: Funkcje $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe i g nie zmienia znaku. Wówczas istnieje $\xi \in (a, b)$ takie, że $\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$.
- Niech $0 < a < b$ i $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła. Wyznacz $\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{ta}^{tb} \frac{f(x)}{x} dx$.
- Wyprowadź wzór na pole elipsy o równaniu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- Oblicz granice (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$, (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2}$.

Całka Newtona i Riemanna

Definicja. Podziałem P przedziału $[a, b]$ nazwiemy każdy skończony ciąg punktów $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ taki, że $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Przyjmujemy oznaczenie $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ dla $i = 1, 2, \dots, n$. Zbiór wszystkich podziałów odcinka $[a, b]$ będziemy oznaczać $\mathcal{P}$.

Definicja (sumy Riemanna). Niech $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną, $P = (x_0, \dots, x_n) \in \mathcal{P}$ – ustalonym podziałem odcinka $[a, b]$. Sumy

$$U(P, f) = \sum_{i=1}^n \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot \Delta x_i, \quad L(P, f) = \sum_{i=1}^n \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot \Delta x_i$$

nazywamy odpowiedni *dolną* i *górną sumę Riemanna* funkcji f dla podziału P .

Definicja (górną i dolną całkę Riemanna). Dla funkcji ograniczonej $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ liczby

$$I_U(f) = \inf_{P \in \mathcal{P}} U(P, f), \quad I_L(f) = \sup_{P \in \mathcal{P}} L(P, f)$$

nazywamy odpowiednio *górną* i *dolną całkę Riemanna* funkcji f na odcinku $[a, b]$.

Definicja (funkcje całkowalne w sensie Riemanna). Jeśli funkcja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona i $I_U(f) = I_L(f)$, to mówimy, że funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a, b]$ i definiujemy wówczas

$$\int_a^b f(x) dx = L(f) = G(f).$$

Tak zdefiniowaną liczbę nazywamy *całką Riemanna* funkcji f na przedziale $[a, b]$.

Stw. 1. Funkcja ograniczona $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje podział $P \in \mathcal{P}$ taki, że

$$U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon.$$

Tw. 2. Każda funkcja ciągła $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna. Jej całki Newtona i Riemanna na przedziale $[a, b]$ są równe.

3. Funkcja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła. Wykaż, że

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{[a, b]} |f|.$$

4. Udowodnij **wzór Wallisa**:

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2.$$

5. Udowodnij **wzór Stirlinga**:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = 1.$$

6. Powiemy, że podział $P' \in \mathcal{P}$ jest *zagęszczeniem* podziału $P \in \mathcal{P}$, jeżeli podział P' powstaje z P przez dołożenie skończenie wielu punktów. Wykaż, że

$$L(P, f) \leq L(P', f) \quad \text{ i } \quad U(P', f) \leq U(P, f).$$

7. Funkcja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona. Udowodnij, że

$$I_L(f) \leq I_U(f).$$

8. Funkcja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest monotoniczna. Udowodnij, że f jest całkowalna w sensie Riemanna.

1. Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \int_n^{n+1} \frac{x dx}{2x^4 + 1}.$$

2. Udowodnij **całkową nierówność Höldera**. Funkcje $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe,

$$p, q > 0 \text{ i } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \text{ Wówczas}$$

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Całki niewłaściwe

Definicja. Funkcja $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła. Jeżeli istnieje skończona granica

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_a^y f(x) dx = I \quad (\text{A})$$

to I nazywamy *całką niewłaściwą* z funkcji f na przedziale $[a, +\infty)$ i oznaczamy

$$I = \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

Mówimy wtedy, że całka niewłaściwa $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ jest *zbieżna*. Jeżeli granica (A) nie istnieje lub wynosi $\pm\infty$, to mówimy, że ta całka jest *rozbieżna*.

Analogicznie definiujemy całki niewłaściwe $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ (dla $f : (-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$), $\int_a^b f(x) dx$ (dla $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ lub $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$).

Stw. (Warunek Cauchy'ego zbieżności całek niewłaściwych) Całka niewłaściwa $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{M > a} \forall_{d > c > M} \left| \int_c^d f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Stw. (Kryterium porównawcze zbieżności całek niewłaściwych) Funkcje $f, g : [a, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ są ciągłe i istnieją stałe $b \geq a$, $C > 0$ takie, że

$$C \cdot f(x) \geq g(x) \quad \text{dla } x \geq b.$$

Wówczas

(i) Jeśli całka $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ jest zbieżna, to całka $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ jest zbieżna.

(i) Jeśli całka $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ jest rozbieżna, to całka $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ jest rozbieżna.

Definicja (Funkcja Γ Eulera). Dla $x > 0$

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

1. Oblicz całki niewłaściwe, lub wykaż, że są rozbieżne.

(a) $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx,$

(f) $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx,$

(b) $\int_0^{+\infty} x^{-s} dx, s > 0$

(g) $\int_0^1 \ln x dx,$

(c) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2},$

(h) $\int_0^1 x^{-s} dx, s > 0.$

(d) $\int_0^{+\infty} \sin x dx,$

(e) $\int_0^{+\infty} \arctg x dx,$

(i) $\int_0^{\pi/2} \tg x dx.$

2. (**Całka Dirichleta**) Wykaż, że całka niewłaściwa

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}$$

jest zbieżna.

3. Udowodnij, że

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \text{ dla } x > 0, \quad \Gamma(n) = (n-1)! \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

4. Wykaż, że funkcja $\ln(\Gamma(x))$, $x > 0$, jest wypukła.

5. Wykaż, że dla każdego $x > 0$

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot n^x}{(x+n)(x+n-1)\dots(x+1)x}.$$

6. Wykaż, że $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

7. (**Całka Poissona**) Wykaż, że

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Kilka zadań na dobry początek

Umawiamy się, że liczby naturalne to $1, 2, 3, 4, \dots$. Zbiór wszystkich liczb naturalnych oznaczamy $\mathbb{N}$.

1. Liczby a i b są naturalne. Która z liczb jest większa, $a^a \cdot b^b$ czy $a^b \cdot b^a$?
2. Liczbę naturalną n zapisano w pozycyjnym systemie liczbowym o podstawie a jako 111. Udowodnij, że n nie jest kwadratem liczby naturalnej.
3. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n ułamek $\frac{21n+4}{14n+3}$ jest nieskracalny.
4. Każda osoba na świecie uściśnęła dłoń pewnej liczbie innych osób. Udowodnij, że liczba osób, które uściśnęły dłoń nieparzystej liczbie osób, jest parzysta.
5. W pewnej grupie dziewcząt i chłopców każda dziewczynka zna n chłopców i każdy chłopiec zna n dziewcząt, liczba n jest naturalna. Udowodnij, że w grupie jest ta sama liczba chłopców i dziewcząt.
6. 200 osób posadzono w 10 rzędach, po 20 w każdym rzędzie. Z każdej z tak utworzonych 20 kolumn wybrano najniższą osobę i z tych wybranych 20 osób wybrano najwyższą i dano jej do potrzymania niebieski balonik.

Następnie, wybrano najwyższą osobę z każdego rzędu i z tych 10 osób wybrano najniższą i dano jej do potrzymania czerwony balonik.

Okazało się, że te dwie wybrane osoby są różnego wzrostu. Która z nich jest wyższa?

7. Udowodnij, że jeżeli

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1,$$

to

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0.$$

8. Pokaż, że

$$\frac{9}{100} < \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{10}.$$

Elementy logiki

Zmienna logiczna może przyjmować wartość *prawda* (1) lub *falsz* (0).

Wyrażenie logiczne składa się ze zmiennych logicznych i operacji logicznych przedstawionych w tabelce poniżej. Wyrażenie logiczne również może przyjmować wartość *prawda* lub *falsz*, w zależności od wartości zmiennych logicznych, które w nim występują.

Operacje logiczne:

		negacja <i>nie p</i>	koniunkcja <i>p i q</i>	alternatywa <i>p lub q</i>	implikacja <i>z p wynika q</i>	równoważność <i>p wtw., gdy q</i>
<i>p</i>	<i>q</i>	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \iff q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Kolejność wykonywania operacji w wyrażeniach złożonych jest taka jak kolejność odpowiednich kolumn w tabelce. Kolejność operacji można zmienić wstawiając w odpowiednich miejscach nawiasy. Nawiasów można także używać, aby poprawić czytelność wyrażień. Nawiasów należy użyć w wyrażeniach niejednoznacznych z implikacją postaci $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r, p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$, itp.

Tautologią nazywamy wyrażenie logiczne, które przyjmuje wartość *prawda* niezależnie od wartości występujących w nim zmiennych logicznych. Przykłady tautologii to

- prawo podwójnego przeczenia*: $\sim (\sim p) \iff p$,
- prawa przemienności alternatywy*: $(p \vee q) \iff (q \vee p)$,

1. Sporządź tabelkę wartości dla wyrażen logicznych
(a) $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$, (b) $((p \wedge q) \vee (\sim p)) \Rightarrow q$.
2. Które z dwuargumentowych operacji logicznych są (a) przemienne, (b) łączne?
3. Wykaż, że koniunkcja jest rozdzielna względem alternatywy i alternatywa jest rozdzielna względem koniunkcji.
4. Sprawdź, że następujące wyrażenia logiczne są tautologiami:
(a) *Prawo wyłączzonego środka*: $p \vee \sim p$,
(b) *Pierwsze prawo de Morgana*: $\sim (p \wedge q) \iff ((\sim p) \vee (\sim q))$,
(c) *Drugie prawo de Morgana*: $\sim (p \vee q) \iff ((\sim p) \wedge (\sim q))$,
(d) *Prawo przechodności implikacji*: $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

5. Które dwuargumentowe operacje logiczne, poza implikacją, są przechodnie?
6. Zapisz alternatywę, implikację i równoważność tylko za pomocą koniunkcji i negacji.
7. Udowodnij, że implikacji nie da się zapisać tylko za pomocą alternatywy i koniunkcji.
8. Zapisz zaprzeczenia poniższych zdań dotyczących liczby całkowitej *a*:
(a) $-10 < a \leq 2019$, (b) $|a| < 50$, (c) $3 \mid a \vee 5 \nmid a$, (d) $x = 10 \vee x > 5$.
9. W 100-kartkowym zeszycie na 1. kartce jest napisane zdanie *W tym zeszycie dokładnie 1 zdanie jest fałszywe.*, na 2. kartce jest napisane zdanie *W tym zeszycie dokładnie 2 zdanie są fałszywe.*, itd, aż do ostatniej kartki, na której jest napisane zdanie *W tym zeszycie dokładnie 100 zdań jest fałszywych.* Czy wśród tych zdań są zdania prawdziwe. Jeśli tak, to które? (Zakładamy, że w zeszycie nie zapisano żadnych innych zdań).
10. Na wyspie mieszkają tylko rycerze i oszuści. Rycerze zawsze mówią prawdę, oszuści zawsze kłamią. Podróżnik napotkał trzech mieszkańców wyspy i dwóch z nich zapytał, ilu rycerzy mu towarzyszy. Pierwszy odpowiedział, że ani jeden, drugi, że tylko jeden. Który z napotkanych mieszkańców jest rycerzem, a który oszustem?
11. W sądowej sprawie o kradzież konia jest 3 podejrzanych: A, B i C. Wiadomo, że dokładnie jeden z nich ukraść konia. B zeznał, że konia ukraść C. Zeznań A i C nie znamy. Ustalono jednak, że tylko jeden z podejrzanych zeznał prawdę i że to on ukraść konia. Kto ukraść konia?
12. Agent Tajny ma dwóch informatorów. Każdy informator albo zawsze kłamie, albo zawsze mówi prawdę. Każdemu z informatorów Agent Tajny zadał dwa pytania: (1) *Czy ten drugi informator jest kłamcą?* i (2) *Czy, jeśli ty jesteś kłamcą, to drugi informator nie jest kłamcą?* Czy na podstawie uzyskanych odpowiedzi Agent Tajny może stwierdzić, który z informatorów mówi prawdę, a który kłamie? (Jest możliwe, że obaj kłamią lub obaj mówią prawdę.)
13. Sporządź tabelki wartości poniższych wyrażen logicznych. Które z tych wyrażen są tautologiami?

(a) $(p \wedge q) \vee (q \Rightarrow p)$,
(b) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$,
(c) $((p \vee q) \wedge r) \iff ((p \wedge r) \vee (q \wedge r))$,
(d) $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \iff ((p \Rightarrow q) \Rightarrow r)$,
14. O liczbach *a, b, c, d, e* wiadomo, że

(i) $(e > a) \Rightarrow ((e > b) \vee (e < c))$,
(ii) $(e \leq b) \Rightarrow (e < d)$,
(iii) $((e < d) \wedge (e > a)) \Rightarrow (e \geq c)$,
(iv) $((e < d) \wedge (e \leq b)) \Rightarrow (e > a)$.

Która z liczb jest większa: *e* czy *b*?

Zbiory i kwantyfikatory

Suma zbiorów: $A \cup B$, przecięcie (część wspólna, iloczyn) zbiorów: $A \cap B$, różnica zbiorów: $A \setminus B$.

Zbiór pusty oznaczamy $\emptyset$.

Zapis $x \in A$ odczytujemy jako x jest elementem (należy do) zbioru A , $x \notin A$ jako x nie jest elementem (nie należy do) zbioru A .

Jeśli A i B to zbiory, to zapis $A \subset B$ oznacza, że A jest podzbiorem B .

Dopełnienie zbioru Jeżeli $A \subset \Omega$, to zbiór $A' = \Omega \setminus A$ nazywamy *dopełnieniem* zbioru A (w zbiorze Ω). Na przykład, dopełnieniem zbioru liczb wymiernych w zbiorze liczb rzeczywistych jest zbiór liczb niewymiernych.

Zachodzi równoważność $A \subset B \iff B' \subset A'$.

Różnica symetryczna zbiorów: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

1. Zapisz różnicę symetryczną $A \Delta B$ dwóch zbiorów $A, B \subset \Omega$ za pomocą operacji dopełnienia, sumy i przecięcia zbiorów.
2. Udowodnij *prawa de Morgana* dla podzbiorów $A, B, C \subset \Omega$:
(a) $(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$, (b) $(A \cap B \cap C)' = A' \cup B' \cup C'$.
3. Niech $A, B \subset \Omega$. Zaznacz na diagramie Venna
(a) zbiór elementów $x \in \Omega$, dla których prawdziwe jest zdanie $x \in A \Rightarrow x \in B$
(b) zbiór elementów $x \in \Omega$, dla których prawdziwe jest zdanie $x \in A \iff x \in B$
4. A, B, C oznaczają zbiory. Udowodnij następujące związki:

- | | |
|--|---|
| (a) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$, | (d) $A \cup B = A \Delta B \Delta (A \cap B)$, |
| (b) $A \cap B = \emptyset \iff A \cup B = A \Delta B$, | (e) $A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$, |
| (c) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$ | (f) $A \Delta C \subset (A \Delta B) \cup (B \Delta C)$ |

5. A, B, C to zbiory. Który zbiór jest większy: $A \cup (B \Delta C)$ czy $(A \cup B) \Delta (A \cup C)$?
6. A, B, C, D, E to zbiory. Wykaż, że $A \Delta E \subset (A \Delta B) \cup (B \Delta C) \cup (C \Delta D) \cup (D \Delta E)$.
7. A, B, C, D to zbiory. Czy jest prawdą, że
(a) $(A \setminus B) \Delta (B \setminus C) \Delta (C \setminus A) = (B \setminus A) \Delta (A \setminus C) \Delta (C \setminus B)$,
(b) $(A \setminus B) \Delta (B \setminus C) \Delta (C \setminus D) \Delta (D \setminus A) = (B \setminus A) \Delta (C \setminus B) \Delta (D \setminus C) \Delta (A \setminus D)$?

-
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ – zbiór liczb naturalnych,
 - $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ – zbiór liczb całkowitych,

- $\mathbb{Q}$ – zbiór liczb wymiernych,
- $\mathbb{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych

Ponadto, spotyka się oznaczenia:

- $\mathbb{Z}_+$ – zbiór liczb całkowitych nieujemnych,
- $\mathbb{Z}_-$ – zbiór liczb całkowitych niedodatnich.

Podobnie definiuje się $\mathbb{Q}_+, \mathbb{Q}_-, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-$.

Kwantyfikator ogólny. Zdania postaci *Dla każdego x ze zbioru X zachodzi $p(x)$* , np:

- (a) *Dla każdej liczby naturalnej x prawdziwa jest nierówność $x \geq 1$,*
- (b) *Dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi $x = 0$ lub $x < 0$ lub $x > 0$*

można zapisać jako

$$(a) \quad \forall_{x \in \mathbb{N}} x \geq 1, \quad (b) \quad \forall_{x \in \mathbb{R}} (x = 0 \vee x < 0 \vee x > 0).$$

$\forall$ nazywamy *kwantyfikatorem ogólnym*.

Kwantyfikator szczegółowy. Zdania postaci *Istnieje x ze zbioru X , dla którego zachodzi $p(x)$* , np:

- (a) *Istnieje liczba naturalna x taka, że $x > 2020$,*
- (b) *Istnieje liczba rzeczywista x taka, że $x^2 = 2$*

można zapisać jako

$$(a) \quad \exists_{x \in \mathbb{N}} x > 2020, \quad (b) \quad \exists_{x \in \mathbb{R}} x^2 = 2.$$

$\exists$ nazywamy *kwantyfikatorem szczegółowym*.

Jeżeli dwa kwantyfikatory ogólne lub dwa kwantyfikatory szczegółowe występują jeden po drugim, można zmienić ich kolejność, np.

$$\begin{aligned} \forall_{x \in \mathbb{R}} \forall_{n \in \mathbb{N}} (x > 1 \Rightarrow x^n > 1) &\iff \forall_{n \in \mathbb{N}} \forall_{x \in \mathbb{R}} (x > 1 \Rightarrow x^n > 1) \\ \exists_{x \in \mathbb{R}} \exists_{n \in \mathbb{N}} (x^2 = n + 1 \wedge x > n) &\iff \exists_{n \in \mathbb{N}} \exists_{x \in \mathbb{R}} (x^2 = n + 1 \wedge x > n). \end{aligned}$$

Nie można zmienić kolejności kwantyfikatora ogólnego i szczególnego. Poniższe dwa zdania **nie są** równoważne:

$$(i) \quad \forall_{x \in \mathbb{R}} \exists_{n \in \mathbb{N}} x < n, \quad (ii) \quad \exists_{n \in \mathbb{N}} \forall_{x \in \mathbb{R}} x < n.$$

Zawsze prawdziwa jest jednak implikacja:

$$\left(\exists_{x \in X} \forall_{y \in Y} p(x, y) \right) \Rightarrow \left(\forall_{y \in Y} \exists_{x \in X} p(x, y) \right)$$

Na przykład:

$$\left(\exists_{x \in \mathbb{N}} \forall_{y > 1} y^2 > x \right) \Rightarrow \left(\forall_{y > 1} \exists_{x \in \mathbb{N}} y^2 > x \right).$$

Prawa de Morgana: Jeżeli Ω jest zbiorem, a $p(x)$ to zdanie logiczne, którego wartość zależy od elementu $x \in \Omega$, to

$$(i) \quad \sim \left(\forall_{x \in \Omega} p(x) \right) \iff \exists_{x \in \Omega} \sim p(x), \quad (ii) \quad \sim \left(\exists_{x \in \Omega} p(x) \right) \iff \forall_{x \in \Omega} \sim p(x).$$

8. Zapisz zaprzeczenia poniższych zdań z kwantyfikatorami.

(a) $\forall_{n \in \mathbb{N}} 2 \mid n^2 + n^5$

(b) $\exists_{n \in \mathbb{N}} n^n = 16\,777\,216$

(c) $\forall_{x \in \mathbb{R}} \exists_{n \in \mathbb{N}} x \neq 0 \Rightarrow x^2 > n$

(d) $\exists_{x \in \mathbb{R}} \forall_{n \in \mathbb{Z}} x > 0 \wedge x < n^2 - n + \frac{1}{20}$

(e) $\exists_{n \in \mathbb{N}} \forall_{x > 0} \exists_{k \in \mathbb{N}} \sqrt[k]{x} < n$

(f) $\forall_{k \in \mathbb{N}} \exists_{x > 0} \forall_{n \in \mathbb{Z}_+} (n + \frac{1}{100})^k \geq xn$

(g) $\exists_{q \in \mathbb{Q}} \forall_{x \in \mathbb{R}} \forall_{k \in \mathbb{Z}} q = xk \Rightarrow q = x \vee q = n$

Czy potrafisz rozstrzygnąć czy prawdziwe jest zdanie, czy jego zaprzeczenie?

9. Zapisz za pomocą kwantyfikatorów i działań logicznych definicję *liczby pierwszej*.

10. $A_1, A_2, \dots, A_n$ są podzbiórmi zbioru Ω . Stosując rachunek zdań i kwantyfikatory udowodnij *prawa de Morgana* dla zbiorów:

(i) $(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)' = A_1' \cap A_2' \cap \dots \cap A_n'$

(ii) $(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)' = A_1' \cup A_2' \cup \dots \cup A_n'$

11. Dane są zbiory $A_1, A_2, \dots, A_n$ i $B_1, B_2, \dots, B_n$, przy czym $B_k \subset B_{k+1}$ dla $k = 1, 2, \dots, n-1$. Udowodnij, że

$$(A_1 \triangle B_1) \cap (A_2 \triangle B_2) \cap \dots \cap (A_n \triangle B_n) \subset (A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \triangle B_n.$$

12. Dane są zbiory $A_1, A_2, \dots, A_n$ takie, że $A_k \subset A_1$ dla $k = 2, 3, \dots, n$. Udowodnij, że

$$A_1 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_1 \setminus A_3) \cup \dots \cup (A_1 \setminus A_n) \cup A_n.$$

Wzory skróconego mnożenia

Prawdziwe są następujące tożsamości:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Wzór na kwadrat sumy,

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Wzór na kwadrat różnicy,

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Wzór na różnicę kwadratów.

oraz

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

Własności liczb rzeczywistych, które warto pamiętać: Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b

(i) $a \cdot b = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$ lub $b = 0$.

(ii) $a^2 + b^2 = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$ i $b = 0$.

1. Za pomocą wzorów na kwadrat sumy lub różnicy oblicz (w pamięci) 19^2 , 52^2 , 195^2 , 107^2 , 999^2 .

2. Za pomocą wzoru na różnicę kwadratów oblicz iloczyny $18 \cdot 22$, $53 \cdot 47$, $495 \cdot 505$.

3. Rozwiąż równania

(a) $x^2 - 2x = 3$

(b) $x^2 + x = 2$;

(c) $x^2 + 1 = x$;

(d) $4x^2 - 2x = \frac{3}{4}$

4. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze postaci $k^{2n} - 1$, gdzie $k, n \in \mathbb{N}$.

5. (a) Każda z liczb całkowitych a, b jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych. Wykaż, że liczba $a \cdot b$ też jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych.

(b) Każda z liczb całkowitych a, b jest różnicą kwadratów liczb całkowitych. Czy liczba $a \cdot b$ też jest różnicą kwadratów liczb całkowitych?

(c) Które liczby naturalne są różnicami kwadratów dwóch liczb całkowitych?

6. Uprość sumy

(a) $\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$,

(b) $\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}}$,

(c) $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4} - \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{4}} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$,

(d) $\frac{1}{2\sqrt{1} + 1 \cdot \sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$.

7. Rozwiąż równania

(a) $x^2 + (y - 1)^2 + (x - y)^2 = \frac{1}{3}$,

(b) $x^2 - 3y^2 + 2xy = 2(x - y)$,

(c) $y^4 + 2x^4 + 1 = 4x^2y$.

8. Znajdź wszystkie liczby rzeczywiste x, y, z , dla których zachodzi równość

$$(x - y + z)^2 = x^2 - y^2 + z^2.$$

9. Wyznacz rozwiązania układu równań w liczbach całkowitych x, y, z

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy - z^2 = 1 \end{cases}$$

10. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2yz = 100 \\ 2xy - z^2 = 100 \end{cases}$$

11. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} xy + xz = 8 - x^2 \\ xy + yz = 12 - y^2 \\ yz + zx = -4 - z^2 \end{cases}$$

12. Wyznacz wszystkie trójki x, y, z liczb rzeczywistych spełniających równanie

$$\sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2} = \frac{x+y+z}{2}.$$

13. Rozłóż na czynniki wyrażenia: (a) $a^4 + 4b^4$, (b) $a^8 - 16b^8$, (c) $a^{12} - 4b^{12} + 4a^8b^4 - a^4b^8$

14. Uprość sumy

$$(a) \sum_{k=1}^n \frac{4k}{4k^4 + 1}, \quad (b) \sum_{k=1}^n \frac{k^2 - \frac{1}{2}}{k^4 + \frac{1}{4}}.$$

15. Udowodnij, że każda liczba naturalna postaci $a^4 + 3$, gdzie $a \in \mathbb{N}$ i $a > 1$, jest sumą trzech kwadratów liczb naturalnych.

Nierówności

Poniżej a, b, c, d oznaczają liczby rzeczywiste.

- (1) jeśli $a < b$ i $b < c$, to $a < c$;
- (2) jeśli $a < b$, to $a + c < b + c$ i $a - c < b - c$;
- (3) jeśli $a < b$ i $c > 0$, to $ac < bc$ i $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$;
- (4) jeśli $a < b$ i $c < 0$, to $ac > bc$ i $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$;
- (5) jeśli $a < b$ i $c < d$, to $a + c < b + d$

UWAGA: Nie jest prawdą, że jeśli $a < b$ i $c < d$, to $a - c < b - d$!!!

- (6) jeśli $0 < a < b$ i $0 < c < d$, to $ac < bd$;
- (7) jeśli $0 < a < b$ i $c < d < 0$, to $ad > bc$;

UWAGA: Nie jest prawdą, że jeśli $a < b$ i $c < d$, to $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$!!!

- (8) jeśli $a > b > 0$, to $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$;
- (9) jeśli $a \neq 0$, to $a^2 > 0$;
- (10) jeśli $a > 0, b > 0$ i $a^2 > b^2$, to $a > b$;
- (11) jeśli $a > 0, b > 0$ i $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, to $a > b$.

1. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b spełnione są nierówności:

$$\max(a, b) \geq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \geq \min(a, b).$$

Kiedy każda z tych nierówności staje się równością?

2. Niech $x > 0$. Wykaż, że $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Kiedy zachodzi równość?
3. Wykaż, że dla liczb nieujemnych a, b, c spełniona jest nierówność

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc.$$

4. Liczby $a_1, a_2, \dots, a_n$ są dodatnie i ich iloczyn jest równy 1. Wykaż, że

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 2^n.$$

5. Udowodnij nierówność między średnimi arytmetyczną i geometryczną czterech liczb dodatnich a, b, c, d :

$$\frac{a + b + c + d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}.$$

6. Niech n będzie liczbą naturalną. Która z liczb jest większa: $\sqrt{n} + \sqrt{n+2}$ czy $2\sqrt{n+1}$?
7. Liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają nierówności

$$a + b + c \leq 3d, \quad b + c + d \leq 3a, \quad c + d + a \leq 3b, \quad d + a + b \leq 3c.$$

Wykaż, że $a = b = c = d$.

8. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c spełniona jest nierówność

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

9. Liczby a, b, c są rzeczywiste. Udowodnij, że wśród trzech liczb $a - b^2, b - c^2, c - a^2$ przynajmniej jedna jest mniejsza lub równa $\frac{1}{4}$.
10. Załóżmy, że $0 < a_1, a_2, \dots, a_n < 1$. Udowodnij, że

$$a_1 a_2 \dots a_n \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{lub} \quad (1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n) \leq \frac{1}{2^n}.$$

11. Która z pięciu liczb a, b, c, d, e jest najmniejsza, a która największa, jeśli spełniają one nierówności

$$a + b < c + d, \quad b + c < d + e, \quad c + d < e + a, \quad d + e < a + b.$$

12. Wykaż, że dla liczb dodatnich a, b prawdziwe są nierówności

$$(a) \quad \left(\frac{1}{a} + 3b\right) \left(\frac{1}{b} + 3a\right) \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 24, \quad (b) \quad (a+b) \cdot \sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}.$$

13. Załóżmy, że $a, b \geq 0$. Udowodnij nierówności

$$\frac{a + b}{1 + a + b} \leq \frac{a}{1 + a} + \frac{b}{1 + b} \leq \frac{2(a + b)}{2 + a + b}.$$

14. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$\frac{ab + ad + bc + cd}{a + b + c + d} \geq \frac{ab}{a + b} + \frac{cd}{c + d}.$$

15. Agent Tajny pływa w środku kwadratowego basenu, Wrogi Agent stoi w jednym z rogów. Wrogi Agent nie umie pływać, ale biega 4 razy szybciej niż Agent Tajny pływa. Agent Tajny biega szybciej niż Wrogi Agent. Czy Agent Tajny może uciec Wrogiemu Agentowi?
16. Samochody A i B jadą po okrężnej trasie, której $1/4$ długości przebiega w mieście. Szybkość A w mieście wynosi $2v$, a poza miastem $9v/4$. Szybkość B w mieście wynosi v a poza miastem $3v$. Samochody razem wjeżdżają do miasta. Który z nich i po jakim czasie minie drugiego, jeżeli długość miejskiej drogi wynosi s ?

Powtórzenie

1. Czy poniższe zdanie logiczne jest tautologią?

$$((p \vee q) \Rightarrow (q \wedge r)) \iff ((\sim p \wedge \sim q) \vee q \wedge r).$$

Uzasadnij odpowiedź.

2. W trakcie kolejnej misji Agent Tajny (A.T.) ma 3 informatorów. Każdy informator albo zawsze kłamie, albo zawsze mówi prawdę. Informatorzy wiedzą, który z nich kłamie, a który mówi prawdę. Każdemu informatorowi A.T. zadał dwa pytania:

1. *Czy któryś z pozostałych informatorów kłamie wtedy i tylko wtedy, gdy ty mówisz prawdę?*

2. *Czy, jeśli kłamiesz, to któryś z pozostałych informatorów mówi prawdę?*

Czy na podstawie otrzymanych odpowiedzi A.T. może stwierdzić, który informator mówi prawdę, a który kłamie?

3. Zapisz zaprzeczenie poniższego zdania i rozstrzygnij, czy prawdziwe jest zdanie, czy jego zaprzeczenie.

$$\exists_{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \forall_{y \in \mathbb{R}} \exists_{z \in \mathbb{R}} (xy \leq 0) \vee (x + z > y).$$

4. Dane są zbiory A, B, C, D . Udowodnij, że zbiór

$$X = (A \Delta (B \cup C \cup D)) \cap (B \Delta (C \cup D \cup A)) \cap (C \Delta (D \cup A \cup B))$$

składa się z tych elementów, które należą do dokładnie jednego ze zbiorów A, B, C, D .

5. Dla danej liczby naturalnej n niech A_n oznacza zbiór wszystkich liczb naturalnych większych od n .

(a) Udowodnij, że jeśli $k, l, m \in \mathbb{N}$, to

$$(m \in A_{k+l} \Delta (A_k \setminus A_l)) \iff ((m > k + l) \vee (k < m \leq l)).$$

(b) Rozstrzygnij, czy prawdziwe jest zdanie, czy jego zaprzeczenie:

$$\forall_{k \in \mathbb{N}} \exists_{l \in \mathbb{N}} \forall_{m \in \mathbb{N}} m \in A_{k+l} \Delta (A_k \setminus A_l).$$

6. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} (x+y) \cdot z + x^2 = -3 \\ (y+z) \cdot x + y^2 = 0 \\ (z+x) \cdot y + z^2 = 3 \end{cases}$$

7. Wyznacz wszystkie trójki liczb rzeczywistych x, y, z spełniające układ równań

$$\begin{cases} 2y^2 + 4z^2 - 4yz + 2y + 1 = 0 \\ 3z^2 - 6z + 3 = x^2 \end{cases}$$

8. Dane są liczby dodatnie a, b, c, d takie, że

$$a + b < c + d \quad \text{ i } \quad a + c < b + d.$$

Udowodnij, że

$$a \cdot (a + b + c) < d \cdot (b + c + d).$$

9. Liczby x, y, z są dodatnie. Udowodnij nierówność

$$(x + y)(y + z) \leq x^2 + 2y^2 + z^2.$$

10. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{abc}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}).$$

Wzory dla trzecich potęg

Dla dowolnych liczb a, b

- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$,
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$,
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$,
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$.

1. Rozwiń potęgę:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \left(2x + \frac{y}{2}\right)^3; & \text{(c)} (x^2y - z^3)^3; & \text{(e)} \left(x - 1 + \frac{1}{x}\right)^3. \\ \text{(b)} \left(\frac{2}{3}a + \frac{3}{2}b\right)^3; & \text{(d)} \left(x - \frac{1}{x}\right)^3; & \end{array}$$

2. Przedstaw wyrażenie w postaci sześcianu sumy lub różnicy dwóch wyrażeń:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} 8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3; & \text{(c)} \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2y + 6xy^2 - 8y^3; \\ \text{(b)} x^3 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^5} - \frac{1}{x^9}; & \text{(d)} x^6 - 3x^3 + 3 - \frac{1}{x^3}. \end{array}$$

3. Załóżmy, że $x + \frac{1}{x} = 3$. Oblicz $x^3 + \frac{1}{x^3}$, $x^5 + \frac{1}{x^5}$ i $x^9 + \frac{1}{x^9}$.

4. Załóżmy, że $x - \frac{1}{x} = -2$. Oblicz $x^3 - \frac{1}{x^3}$ i $x^6 - \frac{1}{x^6}$.

5. Znajdź wszystkie liczby pierwsze, które są sumami dwóch sześcianów liczb naturalnych.

6. Załóżmy, że $x + y = a$ i $xy = b$. Wyraż za pomocą a i b wartości wyrażeń (gdy trzeba, zakładamy, że $x \neq 0$ i $y \neq 0$):

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad x^2 + y^2, \quad x^3 + y^3, \quad |x - y|, \quad |x^3 - y^3|, \quad x^4 + y^4.$$

7. Załóżmy, że $x + y + z = a$, $xy + yz + zx = b$, $xyz = c$. Wyraż poprzez a, b, c wartości wyrażeń

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} x^2 + y^2 + z^2, & \text{(d)} (x+y)(y+z)(z+x), \\ \text{(b)} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}, & \text{(e)} x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2, \\ \text{(c)} x^3 + y^3 + z^3, & \text{(f)} (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y). \end{array}$$

8. Wykaż, że **nie istnieje** trójka liczb rzeczywistych a, b, c takich, że

$$a + b + c = 4, \quad ab + bc + ca = 2, \quad \text{oraz} \quad abc = 1.$$

9. Rozłóż na czynniki wyrażenia

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} x^3 - xy^2 + x^2y - y^3; & \text{(c)} a^3 + b^3 + 3ab - 1; \\ \text{(b)} x^3 + xy^2 - x^2y - y^3; & \text{(d)} (x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3; \\ \text{(e)} (a+2b-3c)^3 + (b+2c-3a)^3 + (c+2b-3a)^3; & \\ \text{(f)} (x+y+z)^3 - (y+z-x)^3 - (z+x-y)^3 - (x+y-z)^3. & \end{array}$$

10. Niech $a, b, c \in \mathbb{R}$. Wykaż, że $\sqrt[3]{a-b} + \sqrt[3]{b-c} + \sqrt[3]{c-a} \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczby a, b, c są parami różne.

11. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ liczba $n^{12} + 64$ jest iloczynem **czterech różnych** liczb naturalnych większych od 1.

12. Liczby całkowite k, l, m spełniają równość

$$(k-l)^2 + (l-m)^2 + (m-k)^2 = klm.$$

Wykaż, że liczba $k^3 + l^3 + m^3$ jest podzielna przez $k + l + m + 6$.

13. Udowodnij nierówności między średnią arytmetyczną, geometryczną i harmoniczną trzech liczb dodatnich x, y, z :

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz} \geq \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}.$$

Kiedy te nierówności stają się równościami?

14. Liczby a, b, c są dodatnie. Udowodnij, że

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3.$$

15. Załóżmy, że $x, y, z > 0$. Udowodnij, że

$$(x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9.$$

16. Załóżmy, że $a, b, c \geq 0$. Udowodnij nierówność

$$\left(\frac{a+b+c}{3} \right)^3 \geq \frac{a+b}{2} \cdot \frac{b+c}{2} \cdot \frac{c+a}{2}.$$

17. Niech $a, b, c > 0$. Udowodnij, że

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca.$$

18. Udowodnij, że dla dowolnych liczb nieujemnych a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}} \geq \frac{a + b + c}{3}.$$

19. Liczby dodatnie x, y, z spełniają warunek $x + y + z = 1$. Wykaż, że

$$\frac{64}{27xyz} \geq \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{y}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{z}\right) \geq 64.$$

20. Liczby a, b, c są długościami boków trójkąta. Wykaż, że

$$\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3 + c^3 + 3abc}{2}} \geq \max(a, b, c).$$

Indukcja matematyczna I

Zasada indukcji matematycznej. Dla $n \in \mathbb{N}$ niech T_n oznacza zdanie, które, w zależności od n , może być prawdziwe lub fałszywe.

Jeżeli spełnione są oba warunki:

(i) *baza indukcji*: prawdziwe jest zdanie T_1 ,

(ii) *krok indukcyjny*:

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad T_n \Rightarrow T_{n+1},$$

czyli dla każdej liczby naturalnej n ze zdania T_n wynika zdanie T_{n+1} ,

to dla każdej liczby naturalnej n zdanie T_n jest prawdziwe.

Uwaga: Bazą indukcji może być także zdanie T_k , gdzie k jest pewną liczbą całkowitą. Wówczas krok indukcyjny polega na udowodnieniu dla każdej liczby całkowitej $n \geq k$ implikacji $T_n \Rightarrow T_{n+1}$. Wówczas zdanie T_n jest prawdziwe dla każdej liczby całkowitej $n \geq k$.

1. Za pomocą zasady indukcji wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są równości:

$$(a) \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$(e) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1},$$

$$(b) \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$(f) \sum_{k=1}^n k! \cdot k = (n+1)! - 1,$$

$$(c) \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3},$$

$$(g) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \sqrt{n+1} - 1$$

$$(d) \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2,$$

$$(h) \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) = \frac{n+1}{2n} \quad (n \geq 2),$$

$$(i) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)},$$

$$(j) \sum_{k=1}^n \prod_{j=k}^{k+3} \frac{1}{j} = \frac{1}{18} - \frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)},$$

2. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij równości

$$(a) \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k},$$

$$(b) \prod_{k=n+1}^{2n} k = 2^n \cdot \prod_{k=1}^n (2k-1).$$

3. Znajdź i udowodnij wzór na sumę pierwszych n liczb naturalnych, które przy dzieleniu przez 3 dają resztę 1.

4. Znajdź i udowodnij wzory na sumy

$$(a) \sum_{k=1}^n (-1)^k k^2,$$

$$(b) \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2).$$

5. (**WAŻNE!!**) Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n i liczb rzeczywistych a, b prawdziwa jest tożsamość

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Natomiast jeżeli liczba n jest nieparzysta, to prawdziwa jest tożsamość

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

6. Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$(a) 6 \mid n^3 + 5n,$$

$$(e) 37 \mid 1000^n - 1,$$

$$(b) 9 \mid 4^n + 15n - 1,$$

$$(f) 13 \mid 1000^n + (-1)^{n+1},$$

$$(c) 3 \mid 10^n + 4^n - 2,$$

$$(g) 41 \mid 5 \cdot 7^{2(n+1)} + 2^{3n},$$

$$(d) 11 \mid 2^{6n+1} + 3^{2n+2},$$

$$(h) 10 \mid 2^{(2^{n+1})} - 6.$$

7. Udowodnij, że n prostych dzieli płaszczyznę na nie więcej niż 2^n obszarów.

8. Na ile obszarów dzieli płaszczyznę n okręgów narysowanych tak, że każde dwa mają 2 punkty wspólne i żadne trzy nie mają punktu wspólnego?

9. Na płaszczyźnie narysowano n prostych w taki sposób, że żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. Udowodnij, że proste te dzielą płaszczyznę na $(n^2 + n + 2)/2$ obszarów.

10. Udowodnij, że wśród obszarów na jakie dzieli płaszczyznę n prostych, jest co najwyżej $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ obszarów ograniczonych.

11. Z tablicy o wymiarach 2^n na 2^n usunięto jedno pole o wymiarach 1 na 1. Udowodnij, że pozostałą część tablicy można pokryć nie zachodzącymi na siebie płytkami w kształcie litery L, składającymi się z 3 kwadratów.

12. $A_1, A_2, \dots, A_n$ to zbiory. Udowodnij, że zbiór $A_1 \triangle A_2 \triangle \dots \triangle A_n$ składa się z tych elementów zbioru $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, które należą do nieparzystej liczby zbiorów A_k .

13. Agent Tajny dostał zadanie rozpracowania mafii handlującej dowodami fałszywych twierdzeń matematycznych. W tym celu organizuje on siatkę n informatorów stosując następującą zasadę: dla dowolnych dwóch różnych informatorów pierwszy przekazuje informacje drugiemu albo drugi pierwszemu. Udowodnij, że pewien informator będzie mógł otrzymywać informacje od pozostałych bezpośrednio lub z udziałem tylko jednego pośrednika. (Nie wymagamy, aby pośrednik był zawsze ten sam!)

14. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $2^{(2^n)} - 1$ ma co najmniej n różnych dzielników pierwszych.

Indukcja matematyczna II (Nierówności)

1. Wykaż, że dla $n \in \mathbb{N}$ i $a, b > 0$ zachodzi nierówność

$$(a + b)^n \leq 2^{n-1}(a^n + b^n).$$

2. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są nierówności

$$\sqrt{n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}.$$

3. Znajdź wszystkie liczby naturalne n spełniające nierówność

- | | |
|-----------------------------|--|
| (a) $2^n > n^2$ | (d) $2^{n+1}(n!)^2 < (2n)!$ |
| (b) $n! > n^3$ | (e) $(n!)^2 > n^n$ |
| (c) $3^n > (n+1) \cdot 2^n$ | (f) $(2n)! > 3^{n-1} \cdot (n!)^2 + 4^n$ |

4. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są nierówności

- | |
|---|
| (a) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}$ |
| (b) $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{7}{12}$ |

5. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności

$$\frac{3n}{2n+1} \leq 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

6. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\frac{n}{2} < \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \leq n.$$

7. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są nierówności

- | |
|--|
| (a) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1$ |
| (b) $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{3n+1} > \frac{13}{12}$ |

8. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$$

9. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są nierówności

$$2 - \frac{2}{\sqrt{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n}} < 3.$$

10. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

11. Niech p_n oznacza n -tą liczbę pierwszą (czyli $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, itd.) Udowodnij, że $p_n > 3n$ dla $n \geq 12$.

12. Udowodnij **nierówność Bernoulliego**:

Dla każdej liczby naturalnej n i liczby rzeczywistej $x \geq -1$ prawdziwa jest nierówność

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

13. Kiedy nierówność Bernoulliego staje się równością?

14. Udowodnij **nierówność Weierstrassa**:

Dla liczb $x_1, x_2, \dots, x_n > -1$, które wszystkie są tego samego znaku, prawdziwa jest nierówność

$$(1+x_1) \cdot (1+x_2) \cdot \dots \cdot (1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\dots+x_n.$$

Indukcja matematyczna III

Twierdzenie (Silna indukcja). Dla każdej liczby naturalnej n dane jest pewne zdanie T_n . Jeżeli

(i) zdanie T_1 jest prawdziwe

oraz

(ii) dla każdej liczby naturalnej k z prawdziwości zdań $T_1, T_2, \dots, T_k$ wynika prawdziwość zdania T_{k+1}

to każde ze zdań T_n jest prawdziwe.

1. Wskaż błąd w poniższym rozumowaniu:

Udowodnimy, że wszystkie konie są tego samego koloru, tzn. dla każdej liczby naturalnej n wykażemy zadanie T_n : każde n kotów jest tego samego koloru.

T_1 jest zdaniem prawdziwym, bo jest tylko jeden kot.

Założmy, że prawdziwe jest zdanie T_k . Rozważmy dowolną grupę $k+1$ kotów i ponumerujemy koty liczbami $1, 2, \dots, k, k+1$. Koty o numerach $1, 2, \dots, k$ są tego samego koloru, bo jest ich k , tak samo koty o numerach $2, 3, \dots, k+1$ są tego samego koloru, bo jest ich k . Zatem dla dowolnego $j = 1, 2, \dots, k$ koty o numerach j i $j+1$ są tego samego koloru, więc wszystkie $k+1$ kotów jest tego samego koloru. Na mocy zasady indukcje zdanie T_n jest prawdziwe dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

2. Udowodnij, że jeśli n jest liczbą całkowitą większą od 3, to kwotę n złotych można wypłacić monetami 2 i 5 złotowymi.

3. Dana jest liczba rzeczywista x taka, że liczba $x + \frac{1}{x}$ jest całkowita. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $x^n + \frac{1}{x^n}$ też jest całkowita.

4. Załóżmy, że $a_1 = 5$, $a_2 = 13$ oraz $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że

$$a_n = 2^n + 3^n \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

5. W każde pole tabeli o 3 wierszach i n kolumnach wpisano literę α , β lub γ , przy czym każdą z liter wpisano w dokładnie n pól. Udowodnij, że można tak poprzestawiać litery w każdym wierszu, aby w każdej kolumnie znalazły się trzy różne litery.

6. Wierzchołki n -kata wypukłego pomalowano trzema różnymi kolorami, przy czym każdy kolor został użyty do pomalowania co najmniej jednego wierzchołka oraz każde dwa kolejne wierzchołki pomalowano różnymi kolorami. Udowodnij, że wielokąt można podzielić przekątnymi na trójkąty w taki sposób, że wierzchołki każdego trójkąta będą pomalowane na różne kolory.

7. Udowodnij, że każdą liczbę naturalną można zapisać jako sumę różnych potęg całkowitych nieujemnych liczby 2.

8. Udowodnij, że każda liczba naturalna złożona jest iloczynem liczb pierwszych.

9. Znajdź wszystkie liczby naturalne n o własności, że grupę składającą się z n osób można podzielić na zespoły cztero- i pięcioosobowe.

10. **Liczby Fibonacciego.** Niech $f_1 = f_2 = 1$ i dla $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ dla $n \in \mathbb{N}$.

(a) Udowodnij, że $f_n \leq 2^{n-1}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

(b) (**Wzór Bineta**) Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$f_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

(c) Udowodnij, że każdą liczbę naturalną można zapisać jako sumę różnych liczb Fibonacciego.

11. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n > 2$ istnieje n różnych dzielników liczby $n!$, których suma jest równa $n!$.

12. Niech $x_1, x_2, \dots, x_n$ i $y_1, y_2, \dots, y_m$ to liczby naturalne takie, że

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_m < nm.$$

Udowodnij, że z każdej z sum $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ i $y_1 + y_2 + \dots + y_m$ można usunąć część wyrazów (ale nie wszystkie) tak, że sumy pozostałych wyrazów też będą równe.

Powtórzenie

1. Dana jest liczba rzeczywista x taka, że

$$x > \frac{1}{x} \quad \text{ i } \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = 11.$$

Znajdź wartości wyrażeń $x - \frac{1}{x}$ oraz $x^6 + \frac{1}{x^6}$.

2. Dane są liczby rzeczywiste x, y, z takie, że

$$x + y + z = -5, \quad xy + yz + zx = 2, \quad xyz = 12.$$

Wyznacz wartości wyrażeń:

$$x^3 + y^3 + z^3 \quad \text{ oraz } \quad x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2.$$

3. Liczby a, b, c są dodatnie. Udowodnij nierówność

$$\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \geq \frac{3}{a+b+c}.$$

4. Liczby a, b, c, d są dodatnie i $a + b + c + d = 1$. Udowodnij nierówność

$$\left(\frac{1}{a} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{b} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{c} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{d} - 1\right) \geq 81.$$

5. Niech $x \in [0, 1]$. Udowodnij, że $x \cdot (1-x)^2 \leq \frac{4}{27}$ i wyznacz $x \in [0, 1]$ dla którego nierówność staje się równością.

6. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij przez indukcję, że

$$(a) \quad 9 \mid 5^{2n} + 3n - 1, \quad (b) \quad 25 \mid 2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4.$$

7. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n+1)^2 = \frac{(n+1)(4n^2 + 8n + 3)}{3}.$$

8. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$

$$\sum_{k=2}^n \frac{(k-1) \cdot k!}{2^{k+1}} = \frac{(n+1)! - 2^n}{2^{n+1}}.$$

9. Niech $a_1 = 3$ i $a_{n+1} = a_n(a_n + 2)$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$. Udowodnij, że dla każdego n

$$a_n = 2^{2^n} - 1.$$

10. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n takie, że spełniona jest nierówność

$$(a) \quad 3^n > n \cdot 2^n, \quad (b) \quad n \cdot 5^n > 3^{n+1} + (n+1)^2 \cdot 2^n.$$

11. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}.$$

12. Niech $x \geq 0$ i $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij nierówność

$$(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2.$$

13. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^3}\right) < 3.$$

14. Niech $x_0 = x_1 = 1$ oraz $x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2}$ dla $n \geq 2$. Wykaż, że istnieją liczby rzeczywiste a, b takie, że dla każdego $n \geq 0$

$$x_n = a(1 + \sqrt{2})^n + b(1 - \sqrt{2})^n.$$

Zastosowania nierówności Bernoulliego

Tw. (Nierówność Bernoulliego) Dla każdej liczby naturalnej n i liczby rzeczywistej $x \geq -1$ prawdziwa jest nierówność

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Ponadto, równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$ lub $n = 1$.

1. Udowodnij, że jeśli $n \in \mathbb{N}$ i $x > -1$, to

$$\sqrt[n]{1+x} \leq 1 + \frac{x}{n}.$$

2. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2.$$

3. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwe są nierówności

$$(a) \left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2-n} \geq 2n-1, \quad (b) \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+2n} < \frac{1}{n+3}$$

4. Niech $n \in \mathbb{N}$. Znajdź najmniejszą możliwą wartość wyrażenia

$$\left(1 - \frac{a-b}{a+b}\right)^n + \left(1 + \frac{a-b}{a+b}\right)^n,$$

gdzie $a, b > 0$.

5. Dla danej liczby naturalnej n rozstrzygnij, która z liczb jest większa: n^n czy $(n+1)^{n-1}$

6. Dla danej liczby naturalnej n rozstrzygnij, która z liczb jest większa: $\sqrt[n+1]{n+1}$ czy $\sqrt[n]{n}$.

7. Dla $n \in \mathbb{N}$ udowodnij nierówności

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad \text{oraz} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 3 \cdot \frac{n+1}{n+2} < 3.$$

8. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n spełniona jest nierówność

$$\sqrt[n]{n} \leq 1 + \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

9. Wykaż, że

$$\forall_{x>1} \forall_{k \in \mathbb{N}} \exists_{c>0} \forall_{n \in \mathbb{N}} \quad x^n \geq cn^k.$$

10. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\sum_{k=1}^n \sqrt[k+1]{\frac{k+1}{k}} \leq n+1.$$

11. Niech $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ i $k_{n+1} = k_1$. Udowodnij nierówność

$$\prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{1}{k_j}\right)^{k_{j+1}} \geq 2^n.$$

12. Niech $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ i $a_{n+1} = a_1$. Udowodnij nierówność

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i + \sqrt[n]{a_i}} \geq 1.$$

Nierówność Cauchy'ego I

Definicja. Niech $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

- liczbę $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ nazywamy *średnią arytmetyczną* liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$.
- dla $a_k \geq 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$), liczbę $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$ nazywamy *średnią geometryczną* liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$.
- dla $a_k \neq 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$), liczbę $\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$ nazywamy *średnią harmoniczną* liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Twierdzenie (nierówność Cauchy'ego). Dla liczb nieujemnych $a_1, a_2, \dots, a_n$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Ponadto, równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

- z wykorzystaniem tzw. **indukcji Cauchy'ego**: jeżeli prawdziwe jest twierdzenie T_1 oraz zachodzą implikacje $T_n \Rightarrow T_{2n}$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$ oraz $T_n \Rightarrow T_{n-1}$ dla $n = 2, 3, 4, \dots$, to dla każdego n prawdziwe jest zdanie T_n .
- z wykorzystaniem zwykłej indukcji (zob. zadanie 13),
- z wykorzystaniem **nierówności Bernoulliego**,
- za pomocą ciągów jednomonotonicznych.

Wniosek (nierówność między średnią geometryczną i harmoniczną). Dla liczb dodatnich $a_1, a_2, \dots, a_n$ prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

Ponadto, równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

1. Dana jest liczba naturalna n . Udowodnij, że

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

2. Korzystając z nierówności Cauchy'ego, udowodnij nierówność Bernoulliego.

3. Liczby $a_1, a_2, \dots, a_n$ są dodatnie. Udowodnij nierówność

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq n.$$

4. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{ab}.$$

5. Liczby a, b, c są dodatnie i $abc = 1$. Wykaż, że

$$a^4 + 2b^2 + 4c \geq 7.$$

6. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich x, y, z prawdziwa jest nierówność

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 8\sqrt{xyz} - 16.$$

Kiedy ta nierówność staje się równością?

7. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

8. Jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta i $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$, to pole tego trójkąta wynosi $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (wzór Herona). Udowodnij, że spośród wszystkich trójkątów o danym obwodzie największe pole ma trójkąt równoboczny.

9. Liczby a, b, c, d są dodatnie. Udowodnij nierówność

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}.$$

10. Liczby $a_1, a_2, \dots, a_n$ są dodatnie. Udowodnij, że

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

11. Dane są liczby dodatnie $a_1, \dots, a_n$, takie że $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ oraz $k \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że

$$\frac{1}{a_1^k} + \frac{1}{a_2^k} + \dots + \frac{1}{a_n^k} \geq n^{k+1}.$$

12. Dane są liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \dots, a_n$ wszystkie większe od -1 . Udowodnij, nierówność

$$\frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} + \dots + \frac{1}{a_n+1} \geq \frac{n^2}{a_1+a_2+\dots+a_n+n}.$$

13. Udowodnij (nie korzystając z nierówności Cauchy'ego!), że jeśli liczby $a_1, a_2, \dots, a_n$ są nieujemne i $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$, to $a_1 a_2 \dots a_n \leq 1$. Następnie udowodnij nierówność Cauchy'ego, korzystając z powyższej tezy.

14. Stosując indukcję Cauchy'ego udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \dots, a_n$ zachodzi nierówność

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geq (1+\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n})^n.$$

Nierówność Cauchy'ego II

1. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ spełniona jest nierówność

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \dots b_n} \leq \sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_n + b_n)}.$$

2. Liczy dodatnie $x_1, x_2, \dots, x_n$ spełniają warunek $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$. Udowodnij, że

$$\left(1 + \frac{1}{x_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{x_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{x_n}\right) \geq (n+1)^n.$$

3. Suma liczb dodatnich $a_1, a_2, \dots, a_n$ jest równa 1. Udowodnij, że

$$\left(\frac{1}{a_1} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{a_2} - 1\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{a_n} - 1\right) \geq (n-1)^n.$$

4. Liczy dodatnie $x_1, x_2, \dots, x_n$ spełniają warunek $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$. Udowodnij, że

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right)^2 + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right)^2 + \dots + \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)^2 \geq \frac{(n^2 + 1)^2}{n}.$$

5. Niech $n \in \mathbb{N}$. Za pomocą nierówności Cauchy'ego udowodnij nierówności

$$(a) \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad (b) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$$

6. Niech $x, y, z \geq 0$. Udowodnij nierówność

$$\frac{(x+y+z)^2}{3} \geq x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy}.$$

7. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n

$$n^n - 1 \geq \sqrt{n^{n+1}} \cdot (n-1).$$

8. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n spełniona jest nierówność

$$n \cdot \sqrt[n]{n+1} < n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

9. Niech $q > 1$ i $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij nierówność

$$(q^n - 1)(q^{n+1} + 1) \geq 2nq(q-1).$$

10. Niech $a > 1$ i $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij nierówność

$$a^n - 1 > n \left(\sqrt{a^{n+1}} - \sqrt{a^{n-1}} \right).$$

11. Liczby dodatnie a, b, c, d spełniają warunek $abcd = 1$. Udowodnij, że

$$\frac{a}{b+c+d+1} + \frac{b}{c+d+a+1} + \frac{c}{d+a+b+1} + \frac{d}{a+b+c+1} \geq 1.$$

12. Liczby $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ są dodatnie. Udowodnij nierówność

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i b_i} \cdot \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \geq 4n^2.$$

13. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij nierówność

$$(n+1)^{2n} \geq 3^n \cdot (n!)^2.$$

14. Niech $m, n \in \mathbb{N}$ i $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Wyznacz maksymalną wartość iloczynu

$$(x-a)^m \cdot (b-x)^n,$$

gdzie $a \leq x \leq b$.

15. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2.$$

16. Rozwiąż równanie $x^4 + y^4 + 2 = 4xy$.

17. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} \sqrt{1+x_1} + \sqrt{1+x_2} + \dots + \sqrt{1+x_{100}} = 100 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{100}} \\ \sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \dots + \sqrt{1-x_{100}} = 100 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{100}} \end{cases}$$

Ciągi jednorodnie monotoniczne

Definicja. Mówimy, że dwa ciągi liczb rzeczywistych $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ są *jednorodnie monotoniczne*, jeżeli $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ i $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ lub $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ i $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$.

Umawiamy się, że dla dwóch ciągów liczb rzeczywistych $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \dots, b_n)$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

Mówimy, że ciąg $(b'_1, b'_2, \dots, b'_n)$ jest *permutacją* ciągu $(b_1, b_2, \dots, b_n)$, jeżeli zmieniając kolejność wyrazów w jednym ciągu możemy otrzymać drugi.

Twierdzenie. Jeżeli ciągi liczb rzeczywistych $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ są jednorodnie monotoniczne, to to dla dowolnej permutacji $(b'_1, b'_2, \dots, b'_n)$ ciągu $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ zachodzi nierówność

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b'_1 & b'_2 & \dots & b'_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_n & b_{n-1} & \dots & b_1 \end{bmatrix}.$$

1. Liczby a, b są dodatnie. Udowodnij nierówności

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad a^3 + b^3 &\geq a^2 b + a b^2, & \text{(c)} \quad \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} &\leq \frac{1}{a^3} \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{1}{b^3} \sqrt{\frac{a}{b}}, \\ \text{(b)} \quad a^2 + b^2 &\leq \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a}, & \text{(d)} \quad \sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}} &\geq \sqrt{a} + \sqrt{b} \end{aligned}$$

2. Liczby x, y są dodatnie, $m, n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że $a^{m+n} + b^{m+n} \geq a^m b^n + a^n b^m$.

3. Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad a^3 + b^3 + c^3 &\geq a^2 b + b^2 c + c^2 a \\ \text{(b)} \quad a^3 b + b^3 c + c^3 a &\geq a^2 b c + b^2 c a + c^2 a b \\ \text{(c)} \quad \frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3 b^3 c^3} &\geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}. \end{aligned}$$

4. Udowodnij, że dla liczb dodatnich $a_1, a_2, \dots, a_n$ zachodzi nierówność

$$\frac{a_1}{a_2^2} + \frac{a_2}{a_3^2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n^2} + \frac{a_n}{a_1^2} \geq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}.$$

5. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a^3 b}{c} + \frac{a^3 c}{b} + \frac{b^3 a}{c} + \frac{b^3 c}{a} + \frac{c^3 a}{b} + \frac{c^3 b}{a} \geq 6abc.$$

6. Wykaż, że dla dowolnej permutacji $(a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$ liczb dodatnich $a_1, a_2, \dots, a_n$

$$\frac{a_1}{a'_1} + \frac{a_2}{a'_2} + \dots + \frac{a_n}{a'_n} \geq n.$$

Następnie za pomocą tej nierówności udowodnij nierówność Cauchy'ego.

7. Wykaż, że jeśli liczby a, b, c są dodatnie, to

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

8. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

9. Dane są liczby $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ i $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$ i permutacja $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ ciągu $(y_1, y_2, \dots, y_n)$. Udowodnij, że

$$\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2 \leq \sum_{k=1}^n (x_k - z_k)^2.$$

10. **Nierówność Czebyszewa.** Niech $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ i $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$. Udowodnij, że wówczas

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}.$$

11. Niech $k \in \mathbb{N}$ i $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$. Udowodnij, że wówczas zachodzi nierówność

$$\sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

12. Niech a, b, c to długości boków pewnego trójkąta. Udowodnij nierówności

$$\frac{a(b+c-a)}{bc} + \frac{b(c+a-b)}{ca} + \frac{c(a+b-c)}{ab} \leq 3 \leq \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c}.$$

13. Udowodnij, że dla dowolnych różnych liczb naturalnych $x_1, x_2, \dots, x_n$ zachodzi nierówność

$$\frac{x_1}{1^2} + \frac{x_2}{2^2} + \dots + \frac{x_n}{n^2} \geq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

14. Liczby $a_1, a_2, \dots, a_n$ są dodatnie i $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Udowodnij, że wówczas prawdziwe są nierówności

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \frac{a_1}{S-a_1} + \frac{a_2}{S-a_2} + \dots + \frac{a_n}{S-a_n} &\geq \frac{n}{n-1}, \\ \text{(b)} \quad \frac{S}{S-a_1} + \frac{S}{S-a_2} + \dots + \frac{S}{S-a_n} &\geq \frac{n^2}{n-1}. \end{aligned}$$

Powtórzenie – nierówności

1. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n większej od 1 prawdziwa jest nierówność

$$(a) \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2-1} < \frac{1}{n+2}, \quad (b) \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n-1} < \frac{1}{\sqrt[n]{2n-1}}.$$

2. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij nierówność

$$\prod_{k=1}^n \sqrt[k]{\frac{k}{k+1}} \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

3. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$ prawdziwa jest nierówność

$$\left(1 + \frac{2^n}{n!}\right)^n \geq 1 + \frac{2^{2n-1}}{n!(n-2)!}.$$

4. Wyznacz maksymalną wartość wyrażenia $(1+x)^4 \cdot \sqrt[3]{1-x}$, gdzie $-1 \leq x \leq 1$. Wskaż liczbę x , dla której ta wartość jest przyjmowana.

5. Liczby $a_1, a_2, \dots, a_n$ są dodatnie oraz $a_{n+1} = a_1$ i $a_{n+2} = a_2$. Udowodnij nierówność

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 a_{k+1}^2 a_{k+2}^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k^3 a_{k+1}^3}\right) \geq n^2.$$

6. Udowodnij, że dla każdej liczby dodatniej b i liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\left(\frac{1+nb}{n+1}\right)^{n+1} \geq b^n.$$

7. Liczby dodatnie $a_1, a_2, \dots, a_n$ spełniają nierówność $a_1 + a_2 + \dots + a_n < 1$. Udowodnij, że

$$\frac{a_1 a_2 \dots a_n (1 - a_1 - a_2 - \dots - a_n)}{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n)} \leq \frac{1}{n^{n+1}}.$$

8. Liczby a, b, c są dodatnie. Udowodnij nierówności

$$a + b + c \leq \frac{a^2 + b^2}{2c} + \frac{b^2 + c^2}{2a} + \frac{c^2 + a^2}{2b} \leq \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab}.$$

9. Liczby a, b, c, d są dodatnie. Udowodnij nierówność

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 d + d^2 a.$$

10. Liczby dodatnie $a_1, a_2, \dots, a_n$ spełniają warunek $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$. Udowodnij, że

$$\frac{a_1}{\sqrt{1-a_1}} + \frac{a_2}{\sqrt{1-a_2}} + \dots + \frac{a_n}{\sqrt{1-a_n}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

Wzór dwumianowy Newtona

Dla liczb $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definiujemy *symbol Newtona* (*symbol dwumienny*) jako: gdy $n \geq k$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

natomiast gdy $n < k$ przyjmujemy, że $\binom{n}{k} = 0$.

Tożsamość Pascala. Dla $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zachodzi równość

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Trójkąt Pascala. Wartości symbolu Newtona $\binom{n}{k}$ można dla niezbyt dużych n łatwo wyznaczyć za pomocą tzw. trójkąta Pascala. Jest to trójkątna tabela, której wiersze odpowiadają kolejnym wartościom n :

$$\begin{array}{l|cccccccc} n=0 & & & & & & & & \\ n=1 & & & & & & & & \\ n=2 & & & & & & & & \\ n=3 & & & & & & & & \\ n=4 & & & & & & & & \\ n=5 & & & & & & & & \end{array} \begin{array}{cccccccc} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \end{array}$$

Z tożsamości Pascala wynika, że w każdym wierszu począwszy od trzeciego każdy nieskrajny wyraz jest sumą dwóch wyrazów bezpośrednio nad nim. Można więc szybko wypełniać kolejne wiersze. Dla 6 wierszy (do $n = 5$) otrzymamy:

$$\begin{array}{l|cccccccc} n=0 & & & & & & & & \\ n=1 & & & & & & & & \\ n=2 & & & & & & & & \\ n=3 & & & & & & & & \\ n=4 & & & & & & & & \\ n=5 & & & & & & & & \end{array} \begin{array}{cccccccc} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{array}$$

Twierdzenie (wzór dwumianowy Newtona). Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b i liczby naturalnej n prawdziwy jest wzór

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

1. Udowodnij, że dla $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $k \leq n$ liczba $\binom{n}{k}$ jest całkowita.

2. Rozwiń wyrażenia:

$$(a) \ (a+b)^5, \quad (b) \ \left(2a - \frac{1}{2}b\right)^6, \quad (c) \ (a+b-c)^4.$$

3. Niech $n \in \mathbb{N}$. Znajdź wzory na liczby całkowite a_n i b_n takie, że

$$(3 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n \sqrt{2}.$$

4. Korzystając ze wzoru Newtona udowodnij tożsamości

$$(a) \ 2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}, \quad (b) \ \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

5. Uprość sumy:

$$(a) \ \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}, \quad (b) \ \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k}, \quad (c) \ \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}.$$

6. Udowodnij tożsamości:

$$(a) \ \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k a^k b^{n-k} = n a (a+b)^{n-1}$$

$$(b) \ \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} k(k-1) a^k b^{n-k} = n(n-1) a^2 (a+b)^{n-2}$$

7. „Uprość” sumy

$$(a) \ \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k^2 a^k b^{n-k},$$

$$(b) \ \sum_{k=3}^n \binom{n}{k} k(k-1)(k-2) a^k b^{n-k}.$$

8. Niech $n \in \mathbb{N}$. Oblicz sumy

$$(a) \ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k \quad (b) \ \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} 2^k \quad (c) \ \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} 4^{n-k}$$

9. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba

$$(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n$$

jest całkowita i parzysta.

Podzielność liczb

Niech $a, b \in \mathbb{Z}$. Mówimy, że liczba a jest dzielnikiem liczby b (liczba b jest podzielna przez a), jeżeli istnieje liczba $c \in \mathbb{Z}$ taka, że $b = a \cdot c$. Piszemy wtedy $a \mid b$. Jeżeli a nie jest dzielnikiem b , piszemy $a \nmid b$.

Przydatne własności podzielności liczb:

- (i) $a \mid 0$ oraz $a \mid a$ dla każdej liczby całkowitej a .
- (ii) Jeżeli $a \mid b$ i $b \neq 0$, to $|a| \leq |b|$.
- (iii) Jeżeli $a \mid b$ i $a \mid c$ oraz $x, y \in \mathbb{Z}$, to $a \mid bx + cy$.
- (iv) Jeżeli $a \mid b$ i $b \mid c$, to $a \mid c$.
- (v) Jeżeli $a \mid b$ i $b \mid a$, to $|a| = |b|$.
- (vi) Jeżeli $a \mid b$ i $b \neq 0$, to $\frac{b}{a} \mid b$.
- (vii) Jeżeli $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ to $a \mid b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $ac \mid bc$.

Tw. o dzieleniu z resztą. Dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich a, b istnieją jednoznacznie wyznaczone liczby całkowite k i r takie, że $0 \leq r < a$ oraz $b = ak + r$. Liczbę r nazywamy resztą z dzielenia a przez b .

W dowodzie tw. o dzieleniu z resztą, jak i w dowodach innych twierdzeń z teorii liczb, można skorzystać z następującego twierdzenia:

Zasada minimum. Każdy niepusty podzbiór zbioru liczb naturalnych zawiera element najmniejszy.

1. Znajdź wszystkie liczby $n \in \mathbb{Z}$ takie, że

- (a) $n + 1 \mid n^2 + 1$,
- (b) $n - 1 \mid n^5 + 5$.

2. Udowodnij, że iloczyn n kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez $n!$.

3. Udowodnij, że $13 \mid 2^{70} + 3^{70}$.

4. Wyznacz reszty z dzielenia liczby $2^{2022} + 1$ przez 5, 7, 9.

5. Udowodnij (korzystając tylko z zawartości tej kartki), że jeśli liczba nieparzysta d jest dzielnikiem liczby $2^k n$, gdzie $k, n \in \mathbb{N}$, to d jest dzielnikiem n .

6. Znajdź wszystkie liczby $n \in \mathbb{Z}$ takie, że $2n + 1 \mid n^3 - 3n + 2$.

7. Liczba n jest nieparzysta. Wyznacz resztę z dzielenia liczby $3n^3 + 2n^2 + n - 1$ przez 8.

8. Liczba k jest parzysta. Czy istnieje k liczb naturalnych nieparzystych $n_1, n_2, \dots, n_k$ takich, że

$$1 = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_k}?$$

9. Niech $n \in \mathbb{Z}$. Jakie są możliwe reszty z dzielenia n^2 przez 3, 4, 7?

10. Liczby a i b są nieparzyste. Wykaż, że liczba $a^2 + b^2$ nie jest kwadratem.

11. Suma reszt z dzielenia liczb całkowitych a, b przez d wynosi d . Udowodnij, że

- (a) $d \mid a^k - b^k$ dla dowolnej liczby naturalnej parzystej k ,
- (b) $d \mid a^k + b^k$ dla dowolnej liczby naturalnej nieparzystej k .

12. Niech $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ i $a - c \mid ab + cd$. Wykaż, że $a - c \mid ad + bc$.

13. Znajdź wszystkie liczby naturalne n takie, że liczba otrzymana z n poprzez usunięcie cyfry jedności w zapisie dziesiętnym jest dzielnikiem n .

14. Załóżmy, że $a, b \in \mathbb{Z}$ oraz $a + b \mid a^2 + ab + b^2$. Udowodnij, że

$$(a + b)^2 \mid a^4 + b^4.$$

15. Niech $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Wykaż, że $6 \mid a + b + c$ wtedy i tylko wtedy, gdy $6 \mid a^3 + b^3 + c^3$.

16. Niech $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ i

$$d \mid a + b + c \quad \text{oraz} \quad d \mid a^2 + b^2 + c^2.$$

Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$d \mid a^{(2^n)} + b^{(2^n)} + c^{(2^n)}.$$

17. Liczby $p, q > 2$ są nieparzyste. Udowodnij, że

$$p \mid 1^q + 2^q + \dots + (p - 1)^q.$$

Kongruencje

Niech a i b będą liczbami całkowitymi, zaś m liczbą naturalną.

Definicja. Mówimy, że a przystaje do b modulo m wtedy i tylko wtedy, gdy $m \mid a - b$. Zapisujemy to jako

$$a \equiv b \pmod{m} \iff m \mid a - b$$

i nazywamy *kongruencją* / *przystawaniem modulo m* .

Zauważmy, że $a \equiv b \pmod{m}$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczby a i b dają te same reszty po podzieleniu przez m .

Jeżeli a nie przystaje do b modulo m , to piszemy $a \not\equiv b \pmod{m}$.

Stw. (Podstawowe własności kongruencji) Niech $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$.

- (i) $a \equiv a \pmod{m}$ (zwrotność),
- (ii) $a \equiv b \pmod{m}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b \equiv a \pmod{m}$ (symetria),
- (iii) jeśli $a \equiv b \pmod{m}$ i $b \equiv c \pmod{m}$, to $a \equiv c \pmod{m}$ (przechodność),
- (iv) jeśli $a \equiv b \pmod{m}$ i $c \equiv d \pmod{m}$, to $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ oraz $a - c \equiv b - d \pmod{m}$;
- (v) jeśli $a \equiv b \pmod{m}$ i $c \equiv d \pmod{m}$, to $ac \equiv bd \pmod{m}$.

Uwaga. Nie jest prawdą, że jeśli $a \equiv b \pmod{m}$ oraz $d \mid a$ i $d \mid b$, to $\frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \pmod{m}$.

1. Wyznacz resztę z dzielenia liczby

(a) $28 \cdot 33 \cdot 73$ przez 35, (b) 111111 przez 7, (c) 123456789 przez 13

2. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $n \equiv 3 \pmod{4}$. Udowodnij, że n nie jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych.

3. Liczb n jest nieparzysta. Wykaż, że $n^2 \equiv 1 \pmod{8}$.

4. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $n \equiv k \pmod{8}$, gdzie $k = 3, 6, 7$. Udowodnij, że liczba n nie jest sumą kwadratów dwóch liczb całkowitych.

5. Udowodnij, że $10 \mid 53^{53} - 33^{33}$.

6. Niech $x, y \in \mathbb{Z}$. Wykaż, że $7 \mid 10x + y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $7 \mid x - 2y$. Następnie sprawdź, czy $7 \mid 4\,378\,479$.

7. Niech $n, m \in \mathbb{N}$ i r_k to reszta z dzielenia liczby r^k przez m dla $k = 1, 2, 3, \dots$. Wykaż, że od pewnego momentu liczby r_k będą się powtarzać cyklicznie. Wyznacz te cykle dla (a) $n = 2$, $m = 17$; (b) $n = 6$, $m = 32$.

8. Znajdź resztę z dzielenia

(a) 3^{89} przez 7,

(b) 4^{2022} przez 26,

(c) 9^{1000} przez 210

9. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że

(a) $7 \mid 2^{n+2} + 3^{2n+1}$,

(c) $21 \mid 2^{4^n} + 5$,

(b) $13 \mid 3^{3n+1} + 9^{3n+1} + 1$,

(d) $323 \mid 20^{2n} + 16^{2n} - 3^{2n} - 1$.

10. Wyznacz dwie ostatnie cyfry dziesiętne liczb

(a) $99^{99} - 51^{51}$,

(c) 9^{9^9} ,

(b) 5^{555} ,

(d) $3^{4^{567}}$.

11. Wyznacz resztę z dzielenia przez 7 liczby

$$\sum_{k=1}^{10} 10^{10^k}.$$

12. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n , dla których $7 \mid 2^n - 1$.

Wykaż, że $7 \nmid 2^n + 1$ dla każdej liczby naturalnej n .

13. Liczby a, b, c są całkowite i $9 \mid a^2 + b^2 + c^2$. Udowodnij, że

$$9 \mid a^2 - b^2 \quad \text{lub} \quad 9 \mid b^2 - c^2 \quad \text{lub} \quad 9 \mid c^2 - a^2.$$

14. Udowodnij, że $7 \mid 2222^{5555} + 5555^{2222}$.

15. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że

(a) $3 \mid n$ wtedy i tylko wtedy, gdy suma cyfr dziesiętnych liczby n jest podzielna przez 3.

(b) $9 \mid n$ wtedy i tylko wtedy, gdy suma cyfr dziesiętnych liczby n jest podzielna przez 9.

(c) $11 \mid n$ wtedy i tylko wtedy, gdy naprzemienna suma cyfr dziesiętnych liczby n jest podzielna przez 11.

16. Niech $n \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że liczby $2n + 1$ i $3n + 1$ są kwadratami liczb całkowitych. Udowodnij, że $40 \mid n$.

NWD i NWW

Niech $S \subset \mathbb{N}$. Wówczas $\min S$ oznacza najmniejszą liczbę ze zbioru S . Jeżeli zbiór S jest skończony, to $\max S$ oznacza największą liczbę z tego zbioru.

Największy wspólny dzielnik liczb $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ jest to liczba

$$\text{NWD}(a_1, a_2, \dots, a_k) = \max\{d \in \mathbb{N} : d \mid a_1, d \mid a_2, \dots, d \mid a_k\}.$$

Tw. 1. (Tożsamość Bezout'a) Dla dowolnych liczb naturalnych $a_1, a_2, \dots, a_k$ istnieją liczby całkowite $x_1, x_2, \dots, x_k$ takie, że

$$\text{NWD}(a_1, a_2, \dots, a_k) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_kx_k.$$

Tw. 2. Jeżeli d jest wspólnym dzielnikiem liczb $a_1, a_2, \dots, a_k$, to

$$d \mid \text{NWD}(a_1, a_2, \dots, a_k).$$

Definicja. Mówimy, że liczby $a, b \in \mathbb{Z}$ są względnie pierwsze, jeżeli $\text{NWD}(a, b) = 1$.

Tw. 3. Liczby $a, b \in \mathbb{Z}$ są względnie pierwsze wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $x, y \in \mathbb{Z}$ takie, że $ax + by = 1$.

Tw. 4. (Algorytm Euklidesa) $\text{NWD}(a, b)$, gdzie $a \geq b > 0$, można wyznaczyć za pomocą następującego algorytmu: Niech $x_1 = a, x_2 = b$. Wykonujemy kolejne dzielenia z resztą, aż do otrzymania zerowej reszty:

$$x_1 = q_1x_2 + x_3, \quad 0 < x_3 < x_2$$

$$x_2 = q_2x_3 + x_4, \quad 0 < x_4 < x_3$$

...

$$x_{k-1} = q_{k-1}x_k + x_{k+1}, \quad 0 < x_{k+1} < x_k$$

$$x_k = q_kx_{k+1}.$$

Wówczas $\text{NWD}(a, b) = x_{k+1}$ (ostatnia niezerowa reszta).

Definicja. Niech $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{Z}$. Każdą liczbę $m \in \mathbb{N}$ taką, że $a_1 \mid m, a_2 \mid m, \dots, a_k \mid m$ nazywamy *wspólną wielokrotnością* liczb $a_1, a_2, \dots, a_k$.

Najmniejsza wspólna wielokrotność liczb $a_1, a_2, \dots, a_k$ jest to liczba

$$\text{NWW}(a_1, a_2, \dots, a_k) = \min\{m \in \mathbb{N} : a_1 \mid m, a_2 \mid m, \dots, a_k \mid m\}.$$

Tw. 5. Jeżeli $m \in \mathbb{N}$ jest wspólną wielokrotnością liczb $a_1, a_2, \dots, a_k$, to

$$\text{NWW}(a_1, a_2, \dots, a_k) \mid m.$$

Tw. 6. Niech $a, b \in \mathbb{N}$. Wówczas

$$\text{NWW}(a, b) \cdot \text{NWD}(a, b) = ab.$$

- Niech $n \in \mathbb{Z}$. Udowodnij, że (a) $\text{NWD}(n, n+1) = 1$, (b) $\text{NWD}(2n-1, 2n+1) = 1$
- Założmy, że $a, b \in \mathbb{Z}$. Pokaż, że $\text{NWD}(5a+3b, 13a+8b) = \text{NWD}(a, b)$.
- Niech $a, b \in \mathbb{Z}$ i $d = \text{NWD}(a, b)$. Wykaż, że liczby $\frac{a}{d}$ i $\frac{b}{d}$ są względnie pierwsze.
- Niech $a, b, c \in \mathbb{N}$, $\text{NWD}(a, b) = 1$ i $c \mid a$. Wykaż, że $\text{NWD}(b, c) = 1$.
- Zasadnicze twierdzenie arytmetyki.** Niech $a, b, d \in \mathbb{N}$, $\text{NWD}(a, d) = 1$ i $d \mid ab$. Udowodnij, że $d \mid b$.
- Liczby $a, b, n \in \mathbb{N}$ spełniają warunki $a \mid n, b \mid n$ i $\text{NWD}(a, b) = 1$. Udowodnij, że $ab \mid n$
- Niech $a, b, k \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że
 - jeżeli $k \in \mathbb{N}$, to $\text{NWD}(ka, kb) = k \cdot \text{NWD}(a, b)$;
 - jeżeli $k \in \mathbb{N}$ i $\text{NWD}(k, b) = 1$, to $\text{NWD}(ka, b) = \text{NWD}(a, b)$;
 - $\text{NWD}(a, b) = \text{NWD}(a-b, \min(a, b))$.
- Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej k liczby $2k+1$ i $9k+4$ są względnie pierwsze.
- Udowodnij, że każda liczba naturalna $n > 6$ jest sumą dwóch liczb naturalnych większych od 1 i względnie pierwszych.
- Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że $\text{NWD}(n!+1, (n+1)!+1) = 1$.
- Niech $n \in \mathbb{N}$ i $\text{NWD}(6, n) = 1$. Udowodnij, że $24 \mid n^2 - 1$
- Stosując algorytm Euklidesa oblicz $\text{NWD}(a, b)$ i znajdź $x, y \in \mathbb{Z}$ takie, że $\text{NWD}(a, b) = ax + by$, dla

$$(a) \ a = 329, b = 182,$$

$$(c) \ a = 1745, b = 1485,$$

$$(b) \ a = 1492, b = 1066,$$

$$(d) \ a = 13832, b = 7254.$$

- Niech $a, b, c \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że $\text{NWD}(a, b, c) = \text{NWD}(\text{NWD}(a, b), c)$.
- Niech $m, n \in \mathbb{N}$ i m jest liczbą nieparzystą. Udowodnij, że liczby $2^m - 1$ i $2^n + 1$ są względnie pierwsze.
- Niech $a, n \in \mathbb{N}$ i $a > 1$. Udowodnij, że

$$\text{NWD}\left(\frac{a^n - 1}{a - 1}, a - 1\right) = \text{NWD}(a - 1, n).$$

- Niech $n \in \mathbb{N}$. Pokaż, że

$$\text{NWW}(1, 2, 3, \dots, 2n) = \text{NWW}(n+1, n+2, \dots, 2n).$$

- Niech $a, b \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że $\text{NWD}(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{\text{NWD}(a, b)} - 1$.
- Liczby a, b, n są naturalne i $\text{NWD}(a, b, n) = 1$. Udowodnij, że istnieją liczby naturalne x, y takie, że $\text{NWD}(x, y) = 1$ oraz

$$a \equiv x \pmod{n} \quad \text{i} \quad b \equiv y \pmod{n}.$$

Powtórzenie

1. Udowodnij tożsamości (n, j, k to liczby całkowite nieujemne)

(a) $\binom{n-1}{k} - \binom{n-1}{k-1} = \frac{n-2k}{n} \binom{n}{k}$, gdzie $k < n$,

(b) $\binom{n}{j} \cdot \binom{n-j}{k} = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{j} = \binom{n}{j+k} \cdot \binom{j+k}{j}$, gdzie $j+k \leq n$.

2. Uprość sumy

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} \cdot 3^k, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k} \cdot 5^k.$$

3. Niech $x, y \in \mathbb{Z}$ i $23 \mid 3x + 2y$. Wykaż, że $23 \mid 17x + 19y$.

4. Wyznacz wszystkie liczby całkowite n takie, że $2n + 1 \mid 8n^2 + 17$.

5. Znajdź największą liczbę całkowitą n taką, że $n + 10 \mid n^3 + 100$.

6. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi $n^2 \mid (n+1)^n - 1$.

7. Liczby a, b, c, d są nieparzyste. Udowodnij, że liczba $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ jest podzielna przez 4 i nie jest podzielna przez 8.

8. Znajdź reszty z dzielenia liczby $3^{105} + 4^{105}$ przez 7, 11 i 13.

9. Wyznacz dwie ostatnie cyfry liczby 2021^{2022} .

10. Wyznacz resztę z dzielenia (a) 7^{7^7} przez 9, (b) 9^{9^9} przez 7.

11. Znajdź liczby $x, y \in \mathbb{Z}$ takie, że $\text{NWD}(a, b) = ax + by$ dla (a) $a = 91, b = 279$,
(b) $a = 589, b = 1919$.

12. Liczby k, n są całkowite. Udowodnij, że

$$\text{NWD}(17k + 3n, 11k + 2n) = \text{NWD}(k, n).$$

13. Liczby a, b, c są naturalne. Udowodnij, że $\text{NWD}(a, b, c) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby całkowite x, y, z takie, że $ax + by + cz = 1$.

14. Liczby a, b, n są naturalne. Udowodnij (nie korzystając z rozkładu na liczby pierwsze), że $\text{NWD}(ab, n) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{NWD}(a, n) = \text{NWD}(b, n) = 1$.

Kilka zadań na koniec

1. Dane są liczby naturalne a, b takie, że $a + k \mid b + k$ dla każdej liczby naturalnej k . Udowodnij, że $a = b$.
2. Niech $a, b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ i $a \equiv b \pmod{n}$. Udowodnij, że $a^n \equiv b^n \pmod{n^2}$. Czy zachodzi implikacja przeciwna?
3. Dane są liczby naturalne k, n , przy czym k jest nieparzyste. Udowodnij, że

$$(1 + 2 + \dots + n) \mid (1^k + 2^k + \dots + n^k).$$

4. Dana jest liczba naturalna $n \geq 4$. Udowodnij, że $1! + 2! + \dots + n!$ nie jest kwadratem lub wyższą potęgą liczby naturalnej.
5. Niech $a, m, n \in \mathbb{N}$, $a > 1$ i $a^m + 1 \mid a^n + 1$. Udowodnij, że $m \mid n$.
6. Dane są takie liczby naturalne m i n , że

$$\text{NWD}(m, n) + \text{NWW}(m, n) = m + n.$$

Udowodnij, że jedna z tych liczb jest podzielna przez drugą.

7. Liczby naturalne $n, a_1, a_2, \dots, a_n$ są nieparzyste. Udowodnij, że

$$\text{NWD}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \text{NWD}\left(\frac{a_1 + a_2}{2}, \dots, \frac{a_{n-1} + a_n}{2}, \frac{a_n + a_1}{2}\right).$$

Kilka zadań na koniec

1. Niech $a, b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ i $a \equiv b \pmod{n}$. Udowodnij, że $a^n \equiv b^n \pmod{n^2}$. Czy zachodzi implikacja przeciwna?
2. Dane są takie liczby naturalne m i n , że

$$\text{NWD}(m, n) + \text{NWW}(m, n) = m + n.$$

Udowodnij, że jedna z tych liczb jest podzielna przez drugą.

3. Dane są liczby naturalne k , n , przy czym k jest nieparzysta. Udowodnij, że

$$(1 + 2 + \dots + n) \mid (1^k + 2^k + \dots + n^k).$$

4. Niech $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n > 0$ i $0 < b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$. Udowodnij nierówność

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} \geq n \cdot \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}.$$

Liczby pierwsze

Definicja. Liczba $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ jest *pierwsza* wtw. gdy dla każdej liczby całkowitej a zachodzi implikacja $a \mid p \Rightarrow a = p$ lub $a = 1$. (Równoważnie, liczby pierwsze to te liczby naturalne, które mają dokładnie dwa różne dzielniki naturalne). Czasami zbiór liczb pierwszych jest oznaczany symbolem $\mathbb{P}$.

Liczbę $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, która nie jest liczbą pierwszą, nazywamy *liczbą złożoną*.

Stw. 1. Liczba $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ jest złożona wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba pierwsza p taka, że $p \leq \sqrt{n}$ i $p \mid n$.

Tw. 2. Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Stw. 3. Liczby pierwsze mają następujące własności:

- (i) Jeżeli $p, q \in \mathbb{P}$ i $p \neq q$, to $\text{NWD}(p, q) = 1$.
- (ii) Jeżeli $p \in \mathbb{P}$, $a \in \mathbb{N}$ i $p \nmid a$, to $\text{NWD}(p, a) = 1$.
- (iii) Jeżeli $p \in \mathbb{P}$, $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{N}$ oraz $p \mid a_1 a_2 \dots a_k$, to $p \mid a_i$ dla pewnego $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.
- (iv) Jeżeli $p, q_1, q_2, \dots, q_k \in \mathbb{P}$ i $p \mid q_1 q_2 \dots q_k$, to $p = q_i$ dla pewnego $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Tw. 4. (Podstawowe twierdzenie arytmetyki) Każdą liczbę naturalną $n > 1$ można przedstawić w postaci iloczynu liczb pierwszych, tzn.

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k,$$

gdzie $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{P}$. Ponadto, przedstawienie takie jest jednoznaczne z dokładnością do kolejności czynników.

Wniosek 5. (Postać kanoniczna liczby naturalnej) Każdą liczbę naturalną $n > 1$ można przedstawić jednoznacznie w postaci

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k},$$

gdzie $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{P}$, $p_1 < p_2 < \dots < p_k$, oraz $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}$.

Stw. 6. Liczby $a, b \in \mathbb{N}$ zapisano w postaci kanonicznej

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}, \quad b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k},$$

gdzie $p_i \in \mathbb{P}$, $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dla $i = 1, 2, \dots, k$ oraz $p_1 < p_2 < \dots < p_k$. Wówczas

- (i) $a \mid b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha_i \leq \beta_i$ dla $i = 1, 2, \dots, k$,
- (ii) $\text{NWD}(a, b) = p_1^{\min(\alpha_1, \beta_1)} \cdot p_2^{\min(\alpha_2, \beta_2)} \cdot \dots \cdot p_k^{\min(\alpha_k, \beta_k)}$,
- (iii) $\text{NWW}(a, b) = p_1^{\max(\alpha_1, \beta_1)} \cdot p_2^{\max(\alpha_2, \beta_2)} \cdot \dots \cdot p_k^{\max(\alpha_k, \beta_k)}$.

1. Sprawdź, czy liczby (a) 347, (b) 481 są pierwsze.
2. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p takie, że liczby $4p^2 + 1$ i $6p^2 + 1$ też są pierwsze.
3. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że liczby $p + 2$ i $p + 4$ też są pierwsze.
4. Wyznacz wszystkie pary liczb pierwszych p, q takie, że liczby $7p + q$ i $pq + 11$ też są pierwsze.
5. Liczba $p > 3$ jest pierwsza. Wykaż, że $p^2 \equiv 1 \pmod{24}$.
6. Liczby p i $p^2 + 2$ są pierwsze. Wykaż, że liczba $p^3 + 2$ też jest pierwsza.
7. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje n kolejnych liczb naturalnych złożonych.
8. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $n > 1$. Udowodnij, że każda liczba postaci (a) $4 \cdot 2^{2^n} + 1$, (b) $5 \cdot 3^{3^n} - 2$ jest złożona.
9. Niech $n \in \mathbb{N}$ i załóżmy, że liczba $2^n + 1$ jest pierwsza. Udowodnij, że n jest potęgą dwójki.
10. **Liczby Fermata.** Dla $n = 0, 1, 2, \dots$ niech $F_n = 2^{2^n} + 1$. Udowodnij wzór $F_{n+1} = F_0 F_1 \dots F_n + 2$ i wywnioskuj stąd, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.
11. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $n > 4$. Udowodnij, że n jest liczbą złożoną wtedy i tylko wtedy, gdy $n \mid (n-1)!$.
12. Udowodnij, że liczb pierwszych postaci $4k + 3$, gdzie $k \in \mathbb{N}$, jest nieskończenie wiele.
13. Udowodnij, że każda liczba naturalna jest różnicą dwóch liczb naturalnych mających tyle samo dzielników pierwszych.
14. Liczba p jest pierwsza. Udowodnij, że liczby $2^p + 3^p$ nie można przedstawić w postaci a^m , gdzie $a, m \in \mathbb{N}$ i $m > 1$.
15. Liczba $p > 2$ jest pierwsza, $a \in \mathbb{N}$ i $p \mid a + 1$. Udowodnij, że $p^{n+1} \mid a^{p^n} + 1$ dla każdej liczby całkowitej nieujemnej n .
16. Udowodnij, że liczba $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, jest pierwsza wtedy i tylko wtedy, gdy $p \mid \binom{p}{k}$ dla $k = 1, 2, \dots, p-1$.
17. Znajdź liczby $a, b, c \in \mathbb{N}$ takie, że $\text{NWW}(a, b, c) \cdot \text{NWD}(a, b, c) \neq abc$.
18. Niech $a, b, c \in \mathbb{N}$. Udowodnij tożsamość

$$\text{NWW}(a, b, c) \cdot \text{NWD}(ab, bc, ca) = abc.$$

19. Załóżmy, że $a, b \in \mathbb{N}$ i dla każdego $k \in \mathbb{N}$ $a^{2k-1} \mid b^{2k}$ oraz $b^{2k} \mid a^{2k+1}$. Udowodnij, że $a = b$.
20. Liczby p, q, r są pierwsze, $n \in \mathbb{N}$, oraz $p^n + q^n = r^2$. Udowodnij, że $n = 1$.

Małe twierdzenie Fermata

Stw. 1. Niech $m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$. Wówczas $\text{NWD}(a, m) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba całkowita b taka, że $ab \equiv 1 \pmod{m}$. Ponadto, w zbiorze $\{1, 2, \dots, m-1\}$ jest tylko jedna taka liczba b . (Liczbę b nazywamy *odwrotnością liczby a modulo m* .)

Małe tw. Fermata. Liczba p jest pierwsza, a jest liczbą naturalną. Wówczas

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

oraz, jeśli $\text{NWD}(a, p) = 1$, to

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Definicja. Niech $a, n \in \mathbb{N}$ i $\text{NWD}(a, n) = 1$. *Rzędem liczby a modulo n* nazywamy liczbę

$$\text{ord}_n(a) = \min\{k \in \mathbb{N} : a^k \equiv 1 \pmod{n}\}.$$

Z małego tw. Fermata wynika, że jeśli n jest liczbą pierwszą, to $\text{ord}_n(a)$ jest dobrze zdefiniowaną liczbą.

1. Wyznacz (a) odwrotność 7 modulo 5, (b) odwrotność 10 modulo 13.
2. Liczba p jest pierwsza i $q_1, q_2, \dots, q_{p-1} \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ to odwrotności liczb $1, 2, \dots, p-1$ modulo p . Wykaż, że liczby $q_1, q_2, \dots, q_{p-1}$ są różne.
3. Wyznacz resztę z dzielenia (a) 2^{168} przez 19, (b) 42^{91} przez 23.
4. Wykaż, że $2^{340} \equiv 1 \pmod{341}$. *Uwaga:* $341 = 11 \cdot 31$.
5. Liczba p jest pierwsza, natomiast liczby $a_1, a_2, \dots, a_n$ są całkowite. Udowodnij, że $p \mid a_1 + a_2 + \dots + a_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p \mid a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p$.
6. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że $p \mid 2^p + 1$.
7. Dana jest liczba pierwsza $p > 5$. Udowodnij, że liczba $11 \dots 1$ ($p-1$ jedynek) jest podzielna przez p .
8. Udowodnij, że dla każdej liczby pierwszej $p > 2$

$$1^p + 2^p + 3^p + \dots + (p-1)^p \equiv 0 \pmod{p}.$$

9. Udowodnij, że dla każdej liczby pierwszej p istnieje liczba naturalna n taka, że

$$2^n + 3^n + 6^n \equiv 1 \pmod{p}.$$

10. Liczba p jest pierwsza, natomiast a i b są liczbami całkowitymi. Udowodnij, że jeśli $p \mid a^p - b^p$, to $p^2 \mid a^p - b^p$.

11. Niech $a \in \mathbb{N}$ i liczba pierwsza $p > 2$ jest dzielnikiem liczby $a^2 + 1$. Udowodnij, że $p \equiv 1 \pmod{4}$.
12. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p takich, że $p \equiv 1 \pmod{4}$.
13. Liczba p jest pierwsza, $a, m \in \mathbb{N}$, $\text{NWD}(a, p) = 1$ i $a^m \equiv 1 \pmod{p}$. Udowodnij, że $\text{ord}_n(a) \mid m$.
14. Niech $a, n \in \mathbb{N}$ i $\text{NWD}(a, n) > 1$. Udowodnij, że $a^k \not\equiv 1 \pmod{n}$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$.
15. Liczba p jest pierwsza, $a, m, n \in \mathbb{N}$, $\text{NWD}(a, p) = 1$ i $a^m \equiv a^n \equiv 1 \pmod{p}$. Udowodnij, że $a^{\text{NWD}(m, n)} \equiv 1 \pmod{p}$.
16. Niech $k \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p takich, że $p \equiv 1 \pmod{2^k}$.
17. Niech $a, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ i $p > 2$ jest liczbą pierwszą taką, że $a^p \equiv 1 \pmod{p^n}$. Udowodnij, że $a \equiv 1 \pmod{p^{n-1}}$.

Twierdzenia Eulera i Wilsona

Funkcja Eulera φ . Niech $\varphi(n)$ oznacza liczbę naturalnych nie większych od n i względnie pierwszych z n .

Lemat 1. Niech $m, n \in \mathbb{N}$, $\text{NWD}(m, n) = 1$, $c \in \mathbb{Z}$ i $A_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Dla $k \in A_n$ niech r_k oznacza resztę z dzielenia liczby $km + c$ przez n . Wówczas $\{r_0, r_1, \dots, r_{n-1}\} = A_n$.

Uwaga. Każdy układ liczb całkowitych $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ takich, że $x_i \not\equiv x_j \pmod{n}$ dla $i \neq j$ jest nazywany *pełnym układem reszt modulo n*

Tw. 1. Jeżeli $m, n \in \mathbb{N}$ i $\text{NWD}(m, n) = 1$, to $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$.

Tw. 2. Niech $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ i $p_1, p_2, \dots, p_k$ to wszystkie dzielniki pierwsze liczby n . Wówczas

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Lemat 2. Niech $a, n \in \mathbb{N}$, $\text{NWD}(a, n) = 1$ i

$$R_n = \{r \in \mathbb{N} : r \leq n \text{ i } \text{NWD}(r, n) = 1\} = \{r_1, r_2, \dots, r_{\varphi(n)}\},$$

gdzie $1 = r_1 < r_2 < \dots < r_{\varphi(n)} < n$. Dla każdej z liczb r_k niech s_k oznacza resztę z dzielenia liczby $a \cdot r_k$ przez n . Wówczas $\{s_1, s_2, \dots, s_{\varphi(n)}\} = R_n$.

Uwaga. Każdy układ liczb całkowitych $(x_1, x_2, \dots, x_{\varphi(n)})$, gdzie $x_i \not\equiv x_j \pmod{n}$ dla $i \neq j$ oraz $x_i \equiv r \pmod{n}$ dla pewnego $r \in R_n$ dla każdego i , nazywany jest *zredukowanym układem reszt modulo n* .

Tw. Eulera. Jeżeli $a, n \in \mathbb{N}$ i $\text{NWD}(a, n) = 1$, to

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Tw. Wilsona. Jeżeli p jest liczbą pierwszą, to

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

1. Dla jakich $n \in \mathbb{N}$ liczba $\varphi(n)$ jest nieparzysta?
2. Znajdź wszystkie liczby naturalne n takie, że (a) $\varphi(n) = 10$, (b) $\varphi(n) = 14$.
3. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej m istnieje skończenie wiele liczb naturalnych n takich, że $\varphi(n) = m$.
4. Dla jakich liczb naturalnych n spełniona jest równość $\varphi(n) = \varphi(2n)$?
5. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n takie, że $\varphi(2n) = n$.

6. Niech $m, n \in \mathbb{N}$ i $\text{NWD}(m, n) > 1$. Udowodnij, że $\varphi(m \cdot n) > \varphi(m) \cdot \varphi(n)$.

7. Niech $d, n \in \mathbb{N}$ i $d \mid n$. Wykaż, że $\varphi(d) \mid \varphi(n)$.

8. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij tożsamość

$$n = \sum_{d \mid n} \varphi(d)$$

(suma przebiega wszystkie dzielniki naturalne liczby n)

9. Wyznacz resztę z dzielenia liczby 2021^{2021} przez 66.

10. Znajdź dwie ostatnie cyfry dziesiętne liczby 33^{1492} .

11. Niech $n \in \mathbb{N}$. Wyznacz resztę z dzielenia liczby 3^{2^n} przez 2^n .

12. Udowodnij, że dla każdej liczby pierwszej $p > 5$ spełniona jest kongruencja $p^8 \equiv 1 \pmod{240}$

13. Liczby $a, b \in \mathbb{N}$ są względnie pierwsze. Pokaż, że istnieją $m, n \in \mathbb{N}$ takie, że

$$a^m + b^n \equiv 1 \pmod{ab}.$$

14. Liczba naturalna n jest nieparzysta. Udowodnij, że

$$n \mid (2^2 - 1)(2^3 - 1) \dots (2^{n-1} - 1).$$

15. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej parzystej n

$$n^2 - 1 \mid 2^{n!} - 1.$$

16. Udowodnij, że $n \nmid 2^n - 1$ dla każdej liczby naturalnej $n > 1$.

17. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $n > 1$. Udowodnij, że

$$n \mid 1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n$$

wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą nieparzystą.

18. Liczba $p > 2$ jest pierwsza. Wyznacz resztę z dzielenia liczby $(p-1)!$ przez $p(p-1)$.

19. Niech $a, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ i $\text{NWD}(a, n) = 1$. Udowodnij, że

$$a^{n-1} + (n-1)! \equiv 0 \pmod{n}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą pierwszą.

20. Liczba $p > 2$ jest pierwsza i $n < p$ jest liczbą naturalną. Udowodnij, że $(n-1)! \cdot (p-n)! \equiv (-1)^n \pmod{p}$.

Powtórzenie

1. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n takie, że liczba $n^4 + 4$ ma tylko jeden dzielnik pierwszy.
2. Niech $k > 1$, $p_1, p_2, \dots, p_k$ to pierwsze k liczb pierwszych i $m = p_1 p_2 \dots p_k$. Udowodnij, że liczby $m - 1$ i $m + 1$ nie są kwadratami.
3. Znajdź trzy ostatnie cyfry liczby 9^{7777} .
4. Niech $k \in \mathbb{N}$. Wyznacz resztę z dzielenia liczby $2^{2^{6k+2}}$ przez 19.
5. Udowodnij, że liczb pierwszych postaci $3k + 2$, $k \in \mathbb{N}$, jest nieskończenie wiele.
6. Liczby p i q są pierwsze oraz $p > q$. Udowodnij, że

$$pq \mid (p+1)^q + (q-1)^p - p - q.$$

7. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że każdy większy od 1 nieparzysty dzielnik liczby

$$2021^{2^n} + 1$$

jest większy od 2^{n+1} .

8. Niech $a, b, c \in \mathbb{N}$. Udowodnij tożsamość

$$\begin{aligned} \text{NWW}(a, b, c)^2 \cdot \text{NWD}(a, b) \cdot \text{NWD}(b, c) \cdot \text{NWD}(c, a) &= \\ &= \text{NWD}(a, b, c)^2 \cdot \text{NWW}(a, b) \cdot \text{NWW}(b, c) \cdot \text{NWW}(c, a). \end{aligned}$$

9. Liczba p jest pierwsza, $a, b \in \mathbb{N}$ i $p \nmid ab$. Udowodnij, że

$$p^2 \mid (ab)^{p-1} - a^{p-1} - b^{p-1} + 1.$$

10. Wyznacz wszystkie pary liczb pierwszych (p, q) takie, że

$$pq \mid 2^p + 2^q.$$

11. Niech $a, n \in \mathbb{N}$ i $a, n > 1$. Udowodnij, że $n \mid \varphi(a^n - 1)$.
12. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $n > 6$. Udowodnij, że $\varphi(n) \geq \sqrt{n}$.
13. Dla $n \in \mathbb{N}$ niech $\tau(n)$ oznacza liczbę wszystkich dzielników naturalnych liczby n . Udowodnij, że

$$\varphi(n) + \tau(n) \leq n + 1.$$

Dla jakich n zachodzi równość?

14. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej s istnieje liczba naturalna n , której suma cyfr dziesiętnych wynosi s i taka, że $s \mid n$.
15. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ liczba $3^n - 2^n$ nie jest podzielna przez n .
16. Udowodnij, że wśród liczb postaci $2^n - 3$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, jest nieskończenie wiele liczb parami względnie pierwszych.
17. Niech $n \in \mathbb{N}$. Wyznacz $\text{NWD}(n! + 1, (n+1)!)$.

Wprowadzenie do funkcji

Definicje. Jeżeli każdemu elementowi x zbioru X został przyporządkowany dokładnie jeden element y zbioru Y , to mówimy, że została określona *funkcja* przekształcająca zbiór X w zbiór Y . Jeśli taką funkcję oznaczmy przez f , to piszemy $f : X \rightarrow Y$.

- Jeżeli $y \in Y$ jest elementem przyporządkowanym elementowi $x \in X$, to piszemy $y = f(x)$ i mówimy, że y jest *wartością* funkcji f dla *argumentu* x
- Zbiór X nazywamy *dziedziną* funkcji f , a zbiór Y *przeciwdziedziną* funkcji f .
- Dla podzbioru $U \subset X$ obrazem zbioru U względem funkcji f nazywamy zbiór

$$f(U) = \{f(x) \in Y : x \in U\}.$$

Zbiór $f(X)$ nazywamy *obrazem funkcji* f .

- Funkcję f taką, że dla dowolnych $u, v \in X$ zachodzi $f(u) = f(v)$ nazywamy funkcją *stałą*.
- Funkcję $f : X \rightarrow X$ taką, że dla każdego $x \in X$ zachodzi $f(x) = x$ nazywamy *identycznością* na zbiorze X .
- Dwie funkcje $f, g : X \rightarrow Y$ są równe, jeżeli dla każdego $x \in X$ zachodzi $f(x) = g(x)$. Możemy wówczas napisać $f = g$.
- Powiemy, że funkcja f jest *różnowartościowa* (1 - 1), jeżeli dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$ z równości $f(x_1) = f(x_2)$ wynika, że $x_1 = x_2$ czyli

$$\forall_{x_1, x_2 \in X} f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Piszemy wówczas $f : X \xrightarrow{1-1} Y$. Funkcje różnowartościowe są też nazywane *injekcjami*.

- Powiemy, że funkcja f jest *na*, jeżeli każdy element Y jest wartością funkcji f , czyli

$$\forall_{y \in Y} \exists_{x \in X} y = f(x).$$

Piszemy wówczas $f : X \xrightarrow{na} Y$. Funkcje „na” są nazywane są *surjekcjami*.

- Funkcję, która jest jednocześnie różnowartościowa i „na” nazywamy *bijekcją* lub funkcją *wzajemnie jednoznaczną* i piszemy $f : X \xrightarrow[na]{1-1} Y$.

Złożenie funkcji $f : X \rightarrow Y$ i $g : Y \rightarrow Z$ jest to funkcja $g \circ f : X \rightarrow Z$, której wartość dla elementu $x \in X$ jest zdefiniowana jako

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Składanie funkcji jest łączne, tzn. jeśli $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$, $h : Z \rightarrow U$, to $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Definicja. Funkcja $g : Y \rightarrow X$ jest *funkcją odwrotną* do funkcji $f : X \rightarrow Y$, jeżeli $g \circ f$ jest identycznością na zbiorze X i $f \circ g$ jest identycznością na zbiorze Y . Funkcję g oznaczamy wówczas f^{-1} .

Twierdzenie. Funkcja $f : X \rightarrow Y$ posiada funkcję odwrotną wtedy i tylko wtedy, gdy f jest bijekcją.

Wniosek. Jeżeli funkcja f ma funkcję odwrotną, to tylko jedną.

1. Wyznacz obrazy funkcji:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \ f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = 2n + 3, & \text{(d)} \ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x + 2| - 2. \\ \text{(b)} \ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x - 7, & \\ \text{(c)} \ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1 + x^2}, & \text{(e)} \ f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}, \end{array}$$

Która z tych funkcji jest injekcją, surjekcją czy bijekcją?

2. Niech $k \in \mathbb{N}$. Czy funkcja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(n) = \sqrt[k]{n+1} - \sqrt[k]{n}$, jest różnowartościowa?
3. Podaj przykłady funkcji (a) $f : \mathbb{Z} \xrightarrow{1-1} \mathbb{N}$, (b) $g : \mathbb{N} \xrightarrow{na} \mathbb{Z}$.
4. Podaj przykład funkcji przekształcającej zbiór $\mathbb{N}$ na zbiór liczb wymiernych dodatnich.
5. Podaj przykład funkcji $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takich, że $f \circ g \neq g \circ f$.
6. Rozstrzygnij, czy istnieje funkcja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taka, że dla każdej liczby naturalnej n spełniona jest równość $f(f(n)) = f(n) + 1$ oraz $1 \in f(\mathbb{N})$.
7. Funkcja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ spełnia warunek: jeżeli $m - n$ jest liczbą pierwszą, to $f(m) \neq f(n)$. Czy zbiór wartości funkcji f może być skończony? Jeżeli tak, to wyznacz najmniejszą możliwą liczbę jego elementów.
8. Niech $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$.
 - Każdą funkcję wzajemnie jednoznaczną $f : A_n \rightarrow A_n$ nazywamy *permutacją* zbioru n -elementowego A_n .
 - Permutację f taką, że dla pewnych różnych elementów $a_1, a_2, \dots, a_k \in A_n$ zachodzi $f(a_i) = a_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, k-1$), $f(a_k) = f(a_1)$ i $f(x) = x$ dla $x \neq a_i$, nazywamy *cyklem* długości k i zapisujemy $(a_1, a_2, \dots, a_k)$. Cykl długości 2 nazywamy *transpozycją*.
 - Mówimy, że cykle $(a_1, \dots, a_k)$ i $(b_1, \dots, b_l)$ są rozłączne, jeśli $\{a_1, \dots, a_k\} \cap \{b_1, \dots, b_l\} = \emptyset$.
 - (i) Udowodnij, że każdą permutację można przedstawić jako złożenie pewnej liczby parami rozłącznych cykli.
 - (ii) Udowodnij, że każdą permutację można przedstawić jako złożenie pewnej liczby transpozycji.
 - (iii) Permutację f zapisano jako złożenie p transpozycji i jako złożenie q transpozycji. Udowodnij, że $p \equiv q \pmod{2}$.

Funkcje liczbowe I

Definicja. Funkcja liczbową jest to dowolna funkcja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}$.

Często funkcja liczbową jest podana samym wzorem bez wskazania dziedziny. Wówczas przyjmujemy, że dziedziną takiej funkcji jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, dla których wzór definiujący funkcję ma sens. Na przykład

- dziedziną funkcji $f(x) = \sqrt{x+1}$ jest zbiór $D_f = [-1, +\infty)$,
- dziedziną funkcji $g(x) = \frac{x}{x^2-1}$ jest zbiór $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Jeżeli chcemy napisać, że mamy do czynienia z funkcją zmiennej x bez oznaczania jej literą f , g itp., możemy użyć notacji z symbolem $\mapsto$, np. $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$.

Funkcje liczbowe $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ (określone na tym samym zbiorze D) można dodawać, odejmować i mnożyć. Tak otrzymane funkcje oznaczamy $f+g$, $f-g$, fg . Jeśli $f(x) \neq 0$ dla każdego $x \in D$, to można rozważać iloraz funkcji $\frac{g}{f}$.

Funkcje można również definiować za pomocą kilku wzorów, rozbijając jej dziedzinę na kilka rozłącznych podzbiorów. Na przykład funkcję zwaną *wartością bezwzględną* lub *modułem* $f(x) = |x|$ można zdefiniować w następujący sposób:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{gdy } x \geq 0 \\ -x & \text{gdy } x < 0. \end{cases}$$

Inne przykłady to funkcja *signum*:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{gdy } x < 0 \\ 0 & \text{gdy } x = 0 \\ 1 & \text{gdy } x > 0 \end{cases}$$

oraz funkcja *Dirichleta*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & \text{gdy } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Definicja. Dla $D \subset \mathbb{R}$ takiego, że $x \in D \iff -x \in D$ funkcję $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *parzystą*, jeśli $f(x) = f(-x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ i *nieparzystą*, jeśli $f(x) = -f(-x)$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$.

Definicja. Wykresem funkcji liczbowej $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy podzbiór płaszczyzny $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in D\}$.

1. Wyznacz dziedziny funkcji

$$(a) f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 7}{(x^2 - 2)(x + 1)(x^2 + 2)},$$

$$(b) f(x) = \sqrt{x(x-1)(x-2)(x-3)},$$

$$(c) f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}},$$

$$(d) f(x) = \sqrt{\sqrt[3]{x-2} - \sqrt[3]{2x+1}}$$

$$(e) f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x},$$

$$(f) f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{1-x} - \sqrt[4]{4+x}}.$$

2. Opisz, jak z wykresu funkcji $f(x)$ otrzymać wykres funkcji $f(x) + a$, $f(x + a)$, $af(x)$, $f(ax)$, gdzie $a \in \mathbb{R}$.

3. Korzystając z poprzedniego zadania naszkicuj wykresy funkcji i wyznacz ich zbiory wartości:

$$(a) f(x) = x^2 + 2x - 2, \quad (b) f(x) = \frac{2x+3}{x+1}, \quad (c) f(x) = ||x-2| - 2| - 2.$$

4. Udowodnij, że każda funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest sumą funkcji parzystej i funkcji nieparzystej. Czy takie przedstawienie funkcji f jest tylko jedno?

5. Co można powiedzieć o (nie)parzystości funkcji $f+g$, fg , $f \circ g$ w zależności od (nie)parzystości funkcji f i g ?

$$6. \text{ Narysuj wykres funkcji } f(x) = \sqrt{x \cdot \frac{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}} + 1 - \sqrt{\frac{1+x^2}{2x}} - 1}{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}} + 1 + \sqrt{\frac{1+x^2}{2x}} - 1}}$$

7. Punkt P jest środkiem symetrii wykresu funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Udowodnij, że P należy do tego wykresu.

8. Funkcja $f(x) = \frac{cx}{2x+3}$ spełnia warunek $f \circ f(x) = x$ dla każdego $x \neq -\frac{3}{2}$. Wyznacz współczynnik c .

9. Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$. Oblicz sumę $\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f\left(\frac{j}{k}\right)$.

10. Wyznacz wszystkie funkcje $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{Q}$ spełniona jest równość $f(x) + f(y) = f(x+y)$.

11. Wyznacz wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ takie, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ spełniona jest nierówność $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$.

12. Wyznacz wszystkie funkcje $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takie, że $f(m+n) = f(m)f(n)$ dla wszystkich $m, n \in \mathbb{N}$ oraz $f(f(k)) = f(k)^2$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$.

13. Wyznacz wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ spełniona jest równość

$$(a) f(x) \cdot f(y) - xy = f(x) + f(y) - 1, \quad (d) f(x+y) + xy = f(x)f(y).$$

$$(b) f(x+y)^2 = f(x)^2 + f(y)^2, \quad (e) f(x^2) - f(y^2) = (x+y)(f(x) - f(y)),$$

$$(c) f(x+y) - f(x-y) = 4xy \quad (f) xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x)f(y)$$

14. Funkcja $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ spełnia równość $f(xf(y)) + f(yf(x)) = 2xy$ dla dowolnych $x, y \in (0, +\infty)$. Udowodnij, że f jest iniekcją. Wyznacz wszystkie takie funkcje f .

15. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia równość $f(f(x)+y) = 2x + f(f(y)-x)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że f jest surjekcją. Wyznacz wszystkie takie funkcje f .

16. Funkcja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ spełnia dla każdego $n \in \mathbb{N}$ nierówność $f(n+1) > f \circ f(n)$. Udowodnij, że $f(n) = n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Funkcje liczbowe II

Monotoniczność funkcji. Mówimy, że funkcja f jest

- *rosnąca*, jeśli $f(x) < f(y)$, gdy $x < y$,
- *malejąca*, jeśli $f(x) > f(y)$, gdy $x < y$,
- *niemalejąca*, jeśli $f(x) \leq f(y)$, gdy $x < y$,
- *nierosnąca*, jeśli $f(x) \geq f(y)$, gdy $x < y$,
- *monotoniczna*, jeśli jest niemalejąca lub nierosnąca,
- *ściśle monotoniczna*, jeśli jest rosnąca lub malejąca

Przykłady: funkcja $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ jest rosnąca, funkcja $x \mapsto -x - x^3$ jest malejąca.

Przedział monotoniczności funkcji f jest to przedział, na którym funkcja f jest monotoniczna, który nie jest zawarty w większym przedziale o tej własności.

Przykład: funkcja $f(x) = x^2$ ma dwa przedziały monotoniczności: $(-\infty, 0]$, na którym maleje i $[0, +\infty)$, na którym rośnie.

Ekstrema funkcji. Powiemy, że funkcja f ma w punkcie $a \in D$

- *minimum (minimum globalne)*, jeżeli $f(x) \geq f(a)$ dla każdego $x \in D$. Wówczas piszemy $\min f = f(a)$ lub $\min_D f = f(a)$;
- *maksimum (maksimum globalne)*, jeżeli $f(x) \leq f(a)$ dla każdego $x \in D$. Wówczas piszemy $\max f = f(a)$ lub $\max_D f = f(a)$;
- *minimum lokalne*, jeżeli istnieje przedział $(b, c) \subset D$ taki, że $a \in (b, c)$ i $f(x) \geq f(a)$ dla każdego $x \in (b, c)$;
- *maksimum lokalne*, jeżeli istnieje przedział $(b, c) \subset D$ taki, że $a \in (b, c)$ i $f(x) \leq f(a)$ dla każdego $x \in (b, c)$.

Minimum globalne lub maksimum globalne nazywamy *ekstremum globalnym*

Minimum lokalne lub maksimum lokalne nazywamy *ekstremum lokalnym*.

Przykłady:

- funkcja $f(x) = x^2$ ma w punkcie $a = 0$ minimum globalne i lokalne. Funkcja ta nie ma maksimów lokalnych.
- funkcja $g(x) = 1 - |x + 1|$ ma w punkcie $a = -1$ maksimum globalne i lokalne.
- funkcja $h(x) = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) nie ma ekstremów lokalnych i globalnych

Raczej oczywisty fakt. Niech $a < c < b$ i $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

- Jeżeli funkcja f jest niemalejąca na przedziale $(a, c]$ i nierosnąca na przedziale $[c, b)$, to f ma w punkcie c maksimum lokalne.
- Jeżeli funkcja f jest nierosnąca na przedziale $(a, c]$ i niemalejąca na przedziale $[c, b)$, to f ma w punkcie c minimum lokalne.

Mówimy, że funkcja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ jest *ograniczona z góry*, jeżeli istnieje $A \in \mathbb{R}$ takie, że $f(x) < A$ dla każdego $x \in D$ i *ograniczona z dołu*, jeżeli istnieje $B \in \mathbb{R}$ takie, że $f(x) > B$ dla każdego $x \in D$. Funkcja f jest *ograniczona*, jeżeli f jest ograniczona z góry i z dołu.

1. Udowodnij, że funkcja $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ jest rosnąca. Wyznacz funkcję f^{-1} .
2. Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji, zbadaj czy funkcja jest ograniczona z góry lub z dołu, wyznacz jej ekstrema globalne (jeśli istnieją).

$$(a) f(x) = \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$$

$$(d) f(x) = ||x-2|-2|, x \in \mathbb{R}$$

$$(b) f(x) = \frac{x}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$$

$$(e) f(x) = \frac{x-3}{2x+1}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$$

$$(c) f(x) = |x+1| + |x-1|, x \in \mathbb{R}$$

$$(f) f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}, x \in \mathbb{R}$$

3. Funkcje $f_1, f_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$ są rosnące. Czy jest prawdą, że funkcje

$$g(x) = \min(f(x), g(x)),$$

$$h(x) = \max(f(x), g(x))$$

również są rosnące?

4. Funkcja $f : D \rightarrow E$ jest bijekcją i jest ściśle monotoniczna. Wykaż, że funkcja f^{-1} też jest monotoniczna.
5. Funkcje f i g są ściśle monotoniczne. Co można powiedzieć o monotoniczności funkcji $f \cdot g$ i $f \circ g$?
6. Niech $a < b$. Wykaż, że każda funkcja monotoniczna $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona. Podaj przykład funkcji monotonicznej $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, która jest nieograniczona z góry i z dołu.
7. **Funkcja Riemanna.** Funkcja Riemanna $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowano w następujący sposób: $r(x) = 0$ dla x niewymiernych i $x = 0$, oraz $r(\frac{m}{n}) = n$ dla $x = \frac{m}{n}$, gdzie $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$ i ułamek $\frac{m}{n}$ jest nieskracalny. Pokaż, że funkcja r jest nieograniczona na każdym przedziale (a, b) .
8. Podaj przykład funkcji ograniczonej $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ takiej, że na żadnym przedziale $[a, b] \subset [0, 1]$, $a < b$, f nie przyjmuje wartości największej i najmniejszej.
9. Funkcja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ jest rosnąca i spełnia dla każdej liczby naturalnej n równość

$$f(f(n)) = 3n.$$

Oblicz $f(999)$.

Zadania powtórzeniowe

1. Wyznacz dziedzinę funkcji:

$$(a) f(x) = \frac{\sqrt{3x+5}}{\sqrt[3]{\sqrt{2x-3}-\sqrt{x-2}}}$$

$$(b) f(x) = \frac{\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{(x-2)(x+3)}}$$

$$(c) f(x) = \sqrt{x + \frac{1}{x}} - 2$$

2. Dla jakich liczb naturalnych n istnieje permutacja f zbioru $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$ taka, że dla każdej liczby $k \in A_n$

$$f(k) \neq k \quad \text{ i } \quad f(f(k)) = k?$$

3. Zbadaj, czy poniższe funkcje są parzyste lub nieparzyste:

$$\begin{array}{lll} x \mapsto \operatorname{sgn}(x) \cdot |x| & x \mapsto \frac{x^2 + |x|}{x^4 - 16} & x \mapsto \frac{x \cdot |x|}{x^3 + x} \\ x \mapsto \frac{|x-10|}{x+5} + \frac{|x+10|}{x-5} & x \mapsto (1+x)^n + (1-x)^n & (n \in \mathbb{N}) \end{array}$$

4. Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ równanie $f(x)f(y) = f(xy)$. Udowodnij, że f jest funkcją parzystą lub nieparzystą.

5. Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji, zbadaj czy funkcja jest ograniczona z góry lub z dołu, wyznacz jej ekstrema globalne (jeśli istnieją).

$$(a) f(x) = |x+1| - |x-1|, x \in \mathbb{R}$$

$$(b) f(x) = |4-5x| + |1-3x| + 2x + 4, x \in \mathbb{R}$$

$$(c) f(x) = ||2x-1|+2|, x \in \mathbb{R}$$

$$(d) f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$(e) f(x) = \frac{x-1}{x+1}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

6. Wykaż, że funkcja $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ jest ściśle monotoniczna, wyznacz jej obraz i wyznacz funkcję $f^{-1}: f(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.

7. Wykaż, że funkcja $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x+1}}$$

jest różnowartościowa, jej obrazem jest przedział $[0, \frac{1}{2})$ i wyznacz jej funkcję odwrotną.

Wskazówka: Jeżeli funkcja ma funkcję odwrotną, to jest bijekcją.

8. Wyznacz największą liczbę rzeczywistą a taką, że funkcja

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

jest różnowartościowa na przedziale $[a, +\infty)$ i wyznacz funkcję odwrotną $f^{-1}: f([a, +\infty)) \rightarrow \mathbb{R}$.

9. Wykaż, że dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{R}$ wykres funkcji $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ ma środek symetrii.

10. Znajdź wszystkie funkcje $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że dla każdego $x \neq 1$ spełniona jest równość $f(x) + 2f(\frac{1}{x}) = x$.

11. Wyznacz wszystkie (a) iniekcje, (b) suriekcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $f(f(x) + y) = f(x + y) + 1$.

12. Wyznacz wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y$$

dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$.

13. Podaj przykład bijekcji $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, która nie jest funkcją monotoniczną na żadnym przedziale $[a, b] \subset [0, 1]$.

Wskazówka: Zdefiniuj f oddzielnie dla liczb wymiernych i niewymiernych.

Wartość bezwzględna

Njważniejsze własności wartości bezwzględnej.

- (i) $|x| \geq x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.
- (ii) Jeśli $a > 0$ i $x \in \mathbb{R}$ to nierówność $|x| \leq a$ jest równoważna **koniunkcji** nierówności $-a \leq x \leq a$.
- (iii) Jeśli $a > 0$ i $x \in \mathbb{R}$ to nierówność $|x| \geq a$ jest równoważna **alternatywie** nierówności $x \geq a$ lub $x \leq -a$.
- (iv) Jeśli $x, y \in \mathbb{R}$ to $|xy| = |x| \cdot |y|$ oraz gdy $y \neq 0$ to $\frac{|x|}{|y|} = \left| \frac{x}{y} \right|$.
- (v) Jeśli $x, y \in \mathbb{R}$, to $|x + y| \leq |x| + |y|$ oraz $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

1. Rozwiąż równania:

- | | |
|------------------------------------|-------------------------------|
| (a) $ x + 2 = 2(3 - x)$ | (e) $ 2x + 3x - 5 = x - 1 $ |
| (b) $ x - x - 2 = 2$ | (f) $ x + 1 - 2 = 1$ |
| (c) $ x - 3 + x + 4 = 9$ | (g) $ x + 2 - x = 2$ |
| (d) $2 x + x - 1 + x + 1 = 4$ | (h) $ x + 1 - x - 1 = 3$ |

2. Rozwiąż nierówności:

- | | |
|----------------------------|---------------------------------------|
| (a) $ 5 - 2x < 1$ | (e) $ x + 2 - x > 1$ |
| (b) $ 2 - x < 1 - 2x$ | (f) $ 2x + 6 + 3x - 12 + x < 20$ |
| (c) $ 3x - 4 \geq 7$ | (g) $ x + 3 - 2 \leq 1$ |
| (d) $ x - 2 \leq x + 4 $ | (h) $ x + 3 - 2 > 3$ |

3. Wyznacz liczbę rozwiązań równania w zależności od wartości parametru $m \in \mathbb{R}$:

- | | | |
|---------------------|---------------------|-------------------------|
| (a) $ x - 3 = m$ | (b) $ x - m = 1$ | (c) $ x - m - 3 = 1$ |
|---------------------|---------------------|-------------------------|

4. Wyznacz wszystkie możliwe wartości wyrażenia

$$\frac{|x + y|}{|x| + |y|} + \frac{|y + z|}{|y| + |z|} + \frac{|z + x|}{|z| + |x|}, \quad x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

5. Wyznacz najmniejszą wartość funkcji

$$f(x) = |x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - 100|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

6. Załóżmy, że $-1 < x, y < 1$. Wykaż, że

$$|x - y| < |1 - xy|.$$

7. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi nierówność

$$|x| + |y| + |z| \leq |y + z - x| + |z + x - y| + |x + y - z|.$$

8. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi nierówność

$$|x| + |y| + |z| + |x + y + z| \geq |x + y| + |y + z| + |z + x|.$$

9. Udowodnij, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ spełniona jest nierówność

$$\left| \frac{x}{1 + x^2} - \frac{y}{1 + y^2} \right| \leq |x - y|.$$

10. Dla $x, y \in \mathbb{R}$ niech $d(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{1 + x^2} \sqrt{1 + y^2}}$. Udowodnij, że jeśli $x, y, z \in \mathbb{R}$, to

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

11. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z spełniona jest nierówność

$$\frac{|x + y + z|}{1 + |x + y + z|} \leq \frac{|x|}{1 + |x|} + \frac{|y|}{1 + |y|} + \frac{|z|}{1 + |z|}.$$

12. Wykaż, że jeśli $a, b, c \in \mathbb{R}$, to

$$\left| \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2} \right| \leq |b - c|.$$

13. Rozwiąż równanie

$$2|x - |x + |x - 1|| = |x + |x - |x + 1||.$$

14. Wyznacz wszystkie funkcje $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ takie, że dla dowolnych $x, y \in [0, 1]$

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|.$$

15. Wykaż, że dla dowolnych funkcji $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ istnieją $x, y \in [0, 1]$ takie, że

$$|f(x) + g(y) - xy| \geq \frac{1}{4}.$$

16. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ zachodzi nierówność

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (|a_i - a_j| + |b_i - b_j|) \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_i - b_j|.$$

Część całkowita

Część całkowitą (podłogę) liczby rzeczywistej x (ozn. $\lfloor x \rfloor$) definiujemy jako największą liczbę całkowitą mniejszą lub równą x . Można także spotkać oznaczenie $[x]$.

Stw. Jeżeli x jest liczbą rzeczywistą i k jest liczbą całkowitą, to $\lfloor x \rfloor = k$ wtw. gdy $k \leq x < k + 1$.

Najważniejsze własności części całkowitej:

- (i) Jeśli $x < y$, to $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$ (czyli funkcja $f(x) = \lfloor x \rfloor$ jest niemalejąca).
- (ii) $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.
- (iii) Jeśli $x \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{Z}$ to $\lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$.
- (iv) Jeśli $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$, to $\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$.
- (v) Jeśli $x, y \in \mathbb{R}$ to $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.
- (vi) Jeśli $x, y \geq 0$, to $\lfloor x \rfloor \cdot \lfloor y \rfloor \leq \lfloor xy \rfloor$.

Sufit liczby rzeczywistej x (ozn. $\lceil x \rceil$) definiujemy jako najmniejszą liczbę całkowitą większą lub równą x . Zachodzi równość $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$.

Część ułamkowa liczby rzeczywistej x jest to liczba $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$

1. Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

$$\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor.$$

2. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$.

3. Funkcja $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ jest dana wzorem $f(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$. Wykaż, że f jest surjekcją i znajdź wszystkie liczby naturalne n takie, że $f(n) = 2023$.

4. Rozwiąż równania

- | | |
|---|--|
| (a) $\lfloor x \rfloor + \lfloor 3x \rfloor = 17$, | (d) $\lfloor x - 1 \rfloor = \left\lfloor \frac{x + 2}{2} \right\rfloor$, |
| (b) $\left\lfloor \frac{5 + 6x}{8} \right\rfloor = \frac{15x - 7}{5}$, | (e) $\lfloor x \cdot \lfloor x \rfloor \rfloor = 1$, |
| (c) $\left\lfloor \frac{12x - 5}{7} \right\rfloor = \frac{7x - 6}{4}$, | (f) $\lfloor (x + 1)^2 \rfloor = \lfloor x^2 \rfloor + 1$. |

5. Wyznacz liczbę rozwiązań równania

$$x = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor.$$

6. Udowodnij, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność

$$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor.$$

7. Udowodnij, że dla dowolnych $x, y, z \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność

$$\lfloor 3x \rfloor + \lfloor 3y \rfloor + \lfloor 3z \rfloor \geq 2(\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor z \rfloor) + \lfloor x + y + z \rfloor.$$

8. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor.$$

9. Niech $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. Udowodnij *tożsamość Hermite'a*:

$$\lfloor nx \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor.$$

10. Niech $x \in \mathbb{R}$. Oblicz sumę $\sum_{0 \leq k < l \leq n} \left\lfloor \frac{x+k}{l} \right\rfloor$.

11. Dane są względnie pierwsze liczby naturalne p, q . Udowodnij, że

$$\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

12. Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste $x > 1$ takie, że liczba $\sqrt[n]{\lfloor x \rfloor^n}$ jest całkowita dla każdego $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

13. Liczby $x_1, x_2, \dots, x_n$ są naturalne. Udowodnij nierówność

$$\left\lfloor \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right\rfloor + n \leq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

14. Niech $x \geq 0$. Udowodnij równość $\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.

15. Wykaż, że jest nieskończenie wiele liczb wymiernych dodatnich q takich, że $\{q^2\} + \{q\} = 0,99$ i nie istnieje liczba wymierna dodatnia q taka, że $\{q^2\} + \{q\} = 1$.

16. Udowodnij, że $\sum_{k=1}^{n^2} \left\{ \sqrt{k} \right\} \leq \frac{n^2 - 1}{2}$ dla każdej liczby naturalnej n

17. Liczby a, b są dodatnie, niewymierne i $a + b = 1$. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\lfloor na \rfloor + \lfloor nb \rfloor = n - 1.$$

18. Niech $a, b, c \in \mathbb{R}$ i dla każdej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\lfloor na \rfloor + \lfloor nb \rfloor = \lfloor nc \rfloor.$$

Udowodnij, że $a + b = c$.

Funkcja kwadratowa I

Funkcję $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ daną wzorem

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$ nazywamy trójmianem kwadratowym, funkcją kwadratową, lub wielomianem stopnia 2 (zmiennej x).

Tw. 1. Postać kanoniczna i wyróżnik funkcji kwadratowej. Każdą funkcję kwadratową $f(x) = ax^2 + bx + c$ można zapisać w postaci

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}, \quad \text{gdzie } \Delta = b^2 - 4ac,$$

zwaną *postacią kanoniczną*. We wzorze powyżej liczba Δ jest nazywana *wyróżnikiem* funkcji kwadratowej f .

Tw. 2. (przebieg zmienności funkcji kwadratowej). Funkcja $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a > 0$, jest malejąca na przedziale $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ i rosnąca na przedziale $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$. W punkcie $x = -\frac{b}{2a}$ funkcja f przyjmuje minimum lokalne.

Jeżeli $a < 0$, to funkcja f jest rosnąca na przedziale $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ i malejąca na przedziale $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$. W punkcie $x = -\frac{b}{2a}$ funkcja f przyjmuje maksimum lokalne.

Tw. 3. Pierwiastki funkcji kwadratowej. Funkcja $f(x) = ax^2 + bx + c$ z wyróżnikiem $\Delta = b^2 - 4ac$

(i) ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 , jeżeli $\Delta > 0$, i wówczas

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

(ii) ma jeden pierwiastek rzeczywisty x_1 , jeżeli $\Delta = 0$, i wówczas $x_1 = -\frac{b}{2a}$.

(iii) nie ma pierwiastków rzeczywistych, jeżeli $\Delta < 0$.

Tw. 4. Wzory Viete'a. Rozważamy funkcję kwadratową $f(x) = ax^2 + bx + c$. Niech $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Następujące warunki są równoważne:

(i) Liczby x_1 i x_2 są (wszystkimi) pierwiastkami funkcji f .

(ii) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ i $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ (*Wzory Viete'a*).

(iii) $\forall_{x \in \mathbb{R}} f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ (*postać iloczynowa* funkcji kwadratowej).

1. Sprowadź trójmiany kwadratowe do postaci kanonicznej, znajdź ich pierwiastki, wyznacz ich przedziały monotoniczności i określ ich wartość najmniejszą lub największą:

$$(a) \frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{6}, \quad (b) -\sqrt{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x - \sqrt{6}, \quad (c) x^2 + x - 8,$$

2. Wyznacz najmniejszą i największą wartość trójmianu kwadratowego na podanych przedziałach:

$$(a) f(x) = 2x^2 - 4x - 6, \text{ na } [-4, 4] \text{ i } [1, 5].$$

$$(b) g(x) = -2x^2 + 11x - 5, \text{ na } [0, 5] \text{ i } [-1, 1].$$

3. Rozwiąż równania

$$(a) x^4 - 10x^2 + 9 = 0,$$

$$(d) x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(b) x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 0,$$

$$(c) x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0, \quad (e) \left(\frac{x}{x+1} \right)^2 + \left(\frac{x+1}{x} \right)^2 = \frac{17}{4}.$$

4. Dla danych liczb $a, b \in \mathbb{R}$ rozwiąż równanie

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x+a+b}.$$

5. Niech $a, b, c > 0$. Czy jest możliwe, że każdy z trójmianów

$$ax^2 + bx + c, \quad cx^2 + ax + b, \quad bx^2 + cx + a$$

ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste?

6. Niech $f(x) = ax^2 + bx + c$ i załóżmy, że równanie $f(x) = x$ nie ma rozwiązań rzeczywistych. Pokaż, że równanie $f(f(x)) = x$ też nie ma rozwiązań rzeczywistych.

7. Dany jest trójmian kwadratowy $f(x) = ax^2 + bx + c$. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

$$(i) \forall_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \in \mathbb{Z},$$

$$(ii) \text{liczby } f(-1), f(0) \text{ i } f(1) \text{ są całkowite,}$$

$$(iii) \text{liczby } 2a, a + b \text{ i } c \text{ są całkowite.}$$

8. Korzystając ze wzorów Viete'a, wyznacz (w pamięci) pierwiastki trójmianów

$$x^2 - 5x - 6, \quad x^2 - 6x + 8, \quad x^2 + 2x - 3, \quad 2x^2 + x - 1,$$

$$x^2 + 10x + 21, \quad 6x^2 - 5x - 1, \quad x^2 + x - 56, \quad 8x^2 + 2x - 3.$$

9. Rozwiąż równanie $x^2 + x = 1111111122222222$.

10. Liczby p i q są pierwiastkami trójmianu $x^2 + px + q$. Znajdź p i q .

11. Liczby x_1, x_2 są pierwiastkami trójmianu $x^2 + ax + bc$, liczby x_2, x_3 są pierwiastkami trójmianu $x^2 + bx + ac$, przy czym $ac \neq bc$. Udowodnij, że liczby x_1, x_3 są pierwiastkami trójmianu $x^2 + cx + ab$.

12. Pierwiastki trójmianu $x^2 + ax + b + 1$ są liczbami naturalnymi. Udowodnij, że liczba $a^2 + b^2$ nie jest pierwsza.

Funkcja kwadratowa 2

1. Dla danych liczb rzeczywistych a, b takich, że $\frac{|b|}{2} < |a| < 2|b|$, rozważamy funkcję $f(x) = (x^2 - ax + b^2) \cdot (x^2 + bx + a^2)$. Dla jakich wartości a, b

$$\min f = \left(b^2 - \frac{a^2}{4}\right) \cdot \left(a^2 - \frac{b^2}{4}\right)?$$

2. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ równanie $|x^2 - 6x + 8| + |x^2 - 6x + 5| = a$ ma więcej niż 3 rozwiązania?
3. Wyznacz najmniejszą wartość funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) = (x^2 + x + 1)^2 - (x^2 + x + 1) + 1.$$

4. Wyprowadź wzór na odległość punktu na płaszczyźnie o współrzędnych (p, q) od prostej o równaniu $y = ax + b$.
5. Wyznacz najmniejszą wartość funkcji $f(x) = x^3(x^3 + 1)(x^3 + 2)(x^3 + 3)$.
6. Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ suma kwadratów pierwiastków trójmianu $x^2 - (a - 2)x - a - 1$ jest minimalna?
7. Liczby x_1, x_2 są pierwiastkami trójmianu $x^2 - 6x + 1$. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej n liczba $x_1^n + x_2^n$ jest całkowita i nie jest podzielna przez 5.
8. Niech $P(x) = x^2 + bx + c$ i założmy, że równania $P(x) = 0$ i $P(P(P(x))) = 0$ mają wspólne rozwiązanie. Udowodnij, że $P(0)P(1) = 0$.
9. Wyznacz wszystkie nieujemne rozwiązania równania $\lfloor x^2 \rfloor - 2 \lfloor x \rfloor = 3$.
10. Niech $f(x) = ax^2$. Udowodnij, że na płaszczyźnie istnieje punkt P i prosta k takie, że każdy punkt wykresu funkcji f jest równoodległy od punktu P i prostej k .
- Punkt P nazywamy *ogniskiem* paraboli o równaniu $y = ax^2$, prostą k nazywamy *kierownicą* tej paraboli
11. Wyznacz równanie paraboli postaci $F(x, y) = 0$, której ogniskiem jest punkt $P = (1, 1)$, a kierownica k ma równanie $x + y + 1 = 0$.
12. Dane są dwie parabole o równaniach

$$y = a(x - b)^2 \quad \text{oraz} \quad y = c(x - d)^2.$$

Wykaż, że jeżeli ognisko pierwszej paraboli leży na drugiej paraboli, to ognisko drugiej paraboli leży na pierwszej paraboli.

13. Drut o długości 8 metrów należy podzielić na dwie części i z jednej zrobić kwadrat, a z drugiej trójkąt równoboczny. Jak to zrobić, aby suma pól tych figur była najmniejsza?
14. Znajdź pole i długości boków największego prostokąta zawartego w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych a, b , którego boki są równoległe do tych przyprostokątnych.
15. Pierwszy uczeń rozwiązał 60 równań kwadratowych w czasie o 3 godziny krótszym niż drugi. Ile czasu potrzebuje drugi na rozwiązanie 90 równań, jeżeli razem rozwiązują w ciągu godziny 30 równań. (Zakładamy, że uczeń potrzebuje tyle samo czasu na rozwiązanie każdego równania.)
16. Dwie rury otwarte jednocześnie napełniają w ciągu godziny $3/4$ basenu. Napełnienie basenu do $1/4$ objętości tylko przy pomocy pierwszej rury, a następnie dopełnienie tylko przy pomocy drugiej rury do objętości $3/4$ basenu zajmuje 2,5 godziny. Jeśli otworzyć pierwszą rurę na godzinę, a drugą na pół godziny, to napełni się ponad połowa basenu. W ciągu ilu godzin napełni basen każda z rur osobno?
17. Woda wpływa do zbiornika przez kran, zaś wypływa przez odpływ. Gdy otwarty jest kran i odpływ, pusty zbiornik zostanie napełniony wodą w ciągu 12 godzin. Napełnianie zbiornika trwa o godzinę krócej od opróżniania. Ile czasu potrzeba na napełnienie pustego zbiornika z zamkniętym odpływem wodą? Ile czasu trwa opróżnienie zbiornika z zamkniętym kranem?
18. Liczby rzeczywiste x_1, x_2 są pierwiastkami trójmianu $ax^2 + bx + c$, gdzie $a > 0$. Udowodnij, że $|x_1|, |x_2| \leq 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a + b + c \geq 0$, $a - b + c \geq 0$ i $a - c \geq 0$.
19. Trójmiany kwadratowe $P(x)$ i $Q(x)$ mają całkowite współczynniki i wspólny pierwiastek niewymierny. Udowodnij, że $P(x) = \lambda Q(x)$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{R}$.

Powtórzenie

1. Rozwiąż równania

- (a) $|x - 1| + |x| + |x + 1| = x + 2$,
- (b) $|x - 1| + |x - 4| = 2$,
- (c) $||x - 3| - 2| = 1$.

2. Dla jakich wartości $a \in \mathbb{R}$ równanie $(x - 1)^2 = |x - a|$ ma dokładnie 3 rozwiązania?**3.** Rozwiąż nierówności

- 4. (a) $|x - 2| + |x + 1| \geq 3x - 3$,
- (b) $||x - 3| - 5| \leq 2$,
- (c) $x^2 - 10x + |x - 5| \geq 0$.

5. Załóżmy, że $-1 \leq x, y, z \leq 1$. Udowodnij, że

$$2|xy + yz + zx| \leq |x + y| + |y + z| + |z + x|.$$

6. Udowodnij, że dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x, y, z prawdziwa jest nierówność

$$\frac{|x + 2y|}{|y - z|} + \frac{|y + 2z|}{|z - x|} + \frac{|z + 2x|}{|x - y|} \geq 1.$$

7. Znajdź wszystkie liczby naturalne n takie, że liczba $\lfloor \sqrt[3]{111} \rfloor$ dzieli liczbę 111.**8.** Rozwiąż równania

- (a) $\frac{19x + 6}{10} = \left\lfloor \frac{4x + 7}{3} \right\rfloor$,
- (b) $\left\lfloor \frac{8x + 19}{7} \right\rfloor = \frac{16(x + 1)}{11}$,
- (c) $\lfloor x + 1 \rfloor = \left\lfloor \frac{x - 2}{2} \right\rfloor$,
- (d) $x - \sqrt{\lfloor x \rfloor} = \frac{1}{2}$,
- (e) $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \lfloor 6x \rfloor + \lfloor 8x \rfloor = 2006$.

9. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n + 1} + \sqrt{n + 2} \rfloor = \lfloor \sqrt{9n + 8} \rfloor.$$

10. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej n istnieją liczby całkowite a i b takie, że

$$n = \lfloor a\sqrt{2} \rfloor + \lfloor b\sqrt{3} \rfloor.$$

11. Rozwiąż równanie $2x^4 - 13x^3 - 3x^2 - 13x + 2 = 0$.**12.** Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ suma kwadratów pierwiastków trójmianu kwadratowego $x^2 - (a - 2)x - a - 1$ jest najmniejsza?**13.** Dla danej liczby $a \in \mathbb{R}$ wyznacz najmniejszą wartość funkcji

$$f(x) = (x^2 + 2x + 2)^2 - a(x^2 + 2x - 2).$$

14. Wyznacz nieujemne rozwiązania równania $2 \lfloor x^2 \rfloor = 1 + \lfloor x \rfloor$.

Nierówność Cauchy'ego – Schwarz

Tw. Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ prawdziwa jest nierówność

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right).$$

Ponadto, nierówność ta staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba rzeczywista x taka, że $b_k = x \cdot a_k$ dla $k = 1, 2, \dots, n$.

Wniosek (Postać Engela nierówności C-S). Jeżeli $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ i $b_1, \dots, b_n > 0$, to

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}.$$

1. Udowodnij, że dla liczb nieujemnych a, b zachodzi nierówność

$$(a^3 + b^3)(a + b) \geq (a^2 + b^2)^2.$$

2. Niech $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n + a_n a_1.$$

3. Niech $a, b \in \mathbb{R}$ i $|a|, |b| \leq 1$. Udowodnij, że $ab + \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \leq 1$.

4. Udowodnij, że dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność

$$|a^3 - b^3| \leq |a - b| \sqrt{(2a^2 + b^2)(a^2 + 2b^2)}.$$

5. Załóżmy, że $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $a + 2b + 3c \geq 14$. Udowodnij, że $a^2 + b^2 + c^2 \geq 14$.

6. Liczby dodatnie x, y spełniają równość $x^2 + y^2 = 1$. Udowodnij, że

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 3 + 2\sqrt{2}.$$

7. Liczby a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta. Udowodnij nierówność

$$\sqrt{a}(a - b + c) + \sqrt{b}(b - c + a) + \sqrt{c}(c - a + b) \leq \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c)}.$$

8. Załóżmy, że $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $a^2 + 2b^2 + 3c^2 \leq 6$. Udowodnij, że $|a + b + c| \leq \sqrt{11}$.

9. Załóżmy, że $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ i $a + 2b + 3c + 4d \geq 30$. Udowodnij, że $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 30$.

10. Udowodnij, że dla liczb $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \geq 0$ zachodzi nierówność

$$\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + \dots + \sqrt{a_n b_n} \leq \sqrt{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \cdot \sqrt{b_1 + b_2 + \dots + b_n}.$$

11. Niech $a, b > c > 0$. Udowodnij, że $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$.

12. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$a\sqrt{a^2 + c^2} + b\sqrt{b^2 + c^2} \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

13. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, \dots, a_n$ i $b_1, \dots, b_n$ prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}.$$

14. Niech $n \in \mathbb{N}$. Znajdź największą wartość funkcji

$$f(x) = \frac{(x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1)^2}{x^{2n} + x^{2n-2} + \dots + x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

15. Liczby dodatnie x, y, z spełniają warunek $xyz = 1$. Udowodnij, że

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

16. Za pomocą postaci Engela udowodnij **nierówność Nesbitta**: Jeżeli $a, b, c > 0$, to

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

17. Niech $x, y, z > 0$. Udowodnij nierówność

$$\frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x} \geq \frac{9}{x+y+z}.$$

18. Liczby $a_1, a_2, \dots, a_n$ są dodatnie. Udowodnij nierówność

$$\frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}^2}{a_n} + \frac{a_n^2}{a_1} \geq a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

19. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c, d zachodzi nierówność

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2.$$

20. Liczby a, b, c są dodatnie i $ab + bc + ca \geq 3$. Udowodnij nierówność

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Wzór Legendre'a

Definicja. Niech $p \in \mathbb{P}$, $n \in \mathbb{N}$ i $\nu_p(n)$ oznacza największy wykładnik k taki, że $p^k \mid n$. Liczbę $\nu_p(n)$ nazywamy *wykładnikiem p -adycznym* liczby n .

Tw. (Wzór Legendre'a) Jeżeli p jest liczbą pierwszą i $n \in \mathbb{N}$, to

$$\nu_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \dots$$

-
1. Stosując wzór Legendre'a, udowodnij, że dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych n, k takich, że $n \geq k$ liczba

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

jest całkowita.

2. Liczba p jest pierwsza i $m \in \mathbb{N}$. Oblicz $\nu_p((p^m)!)$.
3. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że 2^n nie dzieli $n!$, ale 2^n dzieli $(2n)!/n!$.
4. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n takie, że $2^{n-1} \mid n!$.
5. Dla jakich liczb naturalnych n liczba $\binom{2n}{n}$ jest podzielna przez 4?
6. Udowodnij, że dla dowolnych $n, m \in \mathbb{N}$ liczby

$$\frac{(2n)! \cdot (2m)!}{n! \cdot m! \cdot (n+m)!} \quad \text{i} \quad \frac{(mn)!}{m! \cdot (n!)^m}$$

są całkowite.

7. Znajdź wszystkie liczby naturalne n takie, że zapis dziesiętny liczby $n!$ kończy się dokładnie 1000 zer.
8. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że $n! = \prod_{k=1}^n \text{NWW} \left(1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \right)$.

Kombinatoryka I

Tw. (Zadada szufladkowa). Niech $k, n \in \mathbb{N}$. Jeżeli $kn+1$ przedmiotów rozmieszczamy w n szufladach, to w jednej z szuflad znajdzie się co najmniej $k+1$ przedmiotów.

Niech A będzie zbiorem skończonym. Moc zbioru A jest to liczba jego elementów. Moc zbioru A zapisujemy jako $|A|$ lub $\overline{A}$.

Reguła dodawania. Jeżeli zbiory skończone $A_1, A_2, \dots, A_n$ są parami rozłączne, to

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|.$$

Reguła mnożenia. $A_1, A_2, \dots, A_k$ to zbiory skończone. Liczba różnych ciągów k -elementowych $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ takich, że $a_j \in A_j$ dla $j = 1, 2, \dots, k$ wynosi

$$|A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_k|.$$

Stw. Zbiory A i B są skończone. Wówczas

- $|A| = |B|$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje bijekcja $f: A \rightarrow B$.
- $|A| \geq |B|$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje surjekcja $f: A \rightarrow B$.
- $|A| \leq |B|$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje iniekcja $f: A \rightarrow B$.

1. Na przyjęciu jest $n \geq 2$ gości. Udowodnij, że pewne dwie osoby mają taką samą liczbę znajomych wśród osób będących na przyjęciu.
2. W każde pole tabeli $n \times n$ wpisano jedną z liczb $-1, 0, 1$, a następnie dodano do siebie liczby z każdego wiersza, z każdej kolumny i z każdej z przekątnych. Udowodnij, że pewne 2 z otrzymanych sum są równe.
3. Udowodnij, że każdy zbiór składający się z n różnych liczb całkowitych zawiera niepusty podzbiór, którego suma elementów jest podzielna przez n .
4. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ wybrano $n+1$ różnych liczb. Wykaż, że z tych $n+1$ liczb można wybrać trzy liczby a, b, c (nie muszą być parami różne) takie, że $a = b + c$.
5. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ wybrano $n+1$ liczb. Udowodnij, że jedna z wybranych liczb jest dzielnikiem innej.
6. Wybrano 20 różnych liczb naturalnych mniejszych od 70. Wykaż, że wśród wszystkich różnic par tych liczb są co najmniej 4 równe.
7. Każdy punkt na okręgu pomalowano jednym z dwóch kolorów. Udowodnij, że pewien trójkąt równoramienny wpisany w ten okrąg ma wszystkie wierzchołki tego samego koloru.
8. Wewnątrz kwadratu o polu 1 obrano 51 punktów. Wykaż, że pewne 3 z nich leżą w kole o promieniu $\frac{1}{7}$.

9. Liczby od 1 do 101 zapisano w dowolnej kolejności. Wykaż, że można skreślić 90 z nich tak, że pozostałe 11 będzie ustawione w porządku rosnącym lub malejącym.
10. **Tw. Dirichleta.** Liczba x jest niewymierna. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n istnieją liczby całkowite p, q takie, że $1 \leq q \leq n$ oraz

$$|xq - p| \leq \frac{1}{n}.$$

11. Numer dowodu osobistego jest ciągiem trzech liter alfabetu łacińskiego i sześciu cyfr. Ile różnych dowodów osobistych można wydać?
12. Ile jest różnych liczb czterocyfrowych, mających tą samą cyfrę setek i jedności?
13. Ile jest różnych liczb pięciocyfrowych o nie powtarzających się cyfrach?
14. Ile jest zgodnych z regułami gry w szachy ustawień na szachownicy 8×8 dwóch króli?
15. Ile jest możliwych ustawień na szachownicy dwóch hetmanów tak, aby jeden nie zagrażał drugiemu?
16. Zbiory $|A|$ i $|B|$ są skończone, $|A| = k$, $|B| = n$. Ile jest (a) funkcji, (b) iniekcji $f: A \rightarrow B$.
17. Na ile sposobów można wybrać (a) podzbiór zbioru n -elementowego, (b) dwa rozłączne podzbiory zbioru n -elementowego?
18. Ile jest surjekcji ze zbioru 4 elementowego na zbiór 3 elementowy?
19. Zbiór A jest niepusty i skończony. Udowodnij, że
 - (a) A ma tyle samo podzbiorów o parzystej i o nieparzystej liczbie elementów.
 - (b) Dla dowolnego elementu $a \in A$, zbiór A ma tyle samo podzbiorów zawierających a i nie zawierających a .
20. Udowodnij, że spośród dowolnych $2^{n-1} + 1$ różnych podzbiorów zbioru n -elementowego zawsze można wybrać dwa podzbiory rozłączne.
21. Niech $n \in \mathbb{N}$. Jakich podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ jest więcej: tych, których suma elementów jest parzysta, czy tych, których suma elementów jest nieparzysta?
22. Ile podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ nie zawiera dwóch kolejnych liczb?
23. Zbiór A ma n elementów, $B_j \subset A$, $j = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$, to różne podzbiory zbioru A , przy czym każde trzy z tych podzbiorów mają niepustą część wspólną. Udowodnij, że istnieje element należący do każdego ze zbiorów B_j .
24. $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$ to różne podzbiory zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$. Przyjmijmy, że $A_{2n+1} = A_1$. Znajdź największą możliwą wartość sumy

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{|A_k \cap A_{k+1}|}{|A_k| \cdot |A_{k+1}|}.$$

Kombinatoryka II

Wariacją k -wyrazową z powtórzeniami zbioru A nazywamy każdą funkcję odwzorowującą zbiór $\{1, 2, \dots, k\}$ w zbiór A . Każdą taką funkcję można wzajemnie jednoznacznie utożsamić z ciągiem długości k o wyrazach ze zbioru A .

Tw. 1. Liczba k -wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru n -elementowego wynosi n^k .

Wariacją k -wyrazową bez powtórzeń zbioru A nazywamy każdą injekcję (funkcję różnowartościową) odwzorowującą zbiór $\{1, 2, \dots, k\}$ w zbiór A . Każdą taką funkcję można wzajemnie jednoznacznie utożsamić z ciągiem długości k o różnych wyrazach ze zbioru A .

Tw. 2. Liczba wariacji k -wyrazowych bez powtórzeń zbioru n -elementowego wynosi $\frac{n!}{(n-k)!}$ jeśli $n \geq k$ i 0 jeśli $n < k$.

Permutacją zbioru n -elementowego A nazywamy każdą bijekcję odwzorowującą zbiór $\{1, 2, \dots, n\}$ na zbiór A . Każdą taką bijekcję można wzajemnie jednoznacznie utożsamić z pewnym ustawieniem wszystkich elementów zbioru A w ciąg długości n .

Tw. 3. Liczba permutacji zbioru n -elementowego wynosi $n!$.

Niech $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $k \leq n$. *Kombinacją k -elementową zbioru n -elementowego A nazywamy każdy k -elementowy podzbiór zbioru A .*

Tw. 4. Niech $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $k \leq n$. Liczba k -elementowych kombinacji (czyli k -elementowych podzbiorów) zbioru n -elementowego jest równa $\binom{n}{k}$.

1. Ile jest ciągów długości 4 o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, \dots, 15\}$ takich, że

- (a) liczba 4 jest jednym z wyrazów ciągu?
- (b) pewna liczba występuje w ciągu dokładnie dwukrotnie?
- (c) pewna liczba występuje w ciągu co najmniej dwukrotnie?

2. Ile różnych liczb trzycyfrowych można utworzyć z cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6, jeżeli

- (a) cyfry mogą się powtarzać?
- (b) cyfry nie mogą się powtarzać?
- (c) cyfry mogą się powtarzać i 1 musi wystąpić co najmniej raz?
- (d) cyfry mogą się powtarzać i liczba musi być większa od 400?
- (e) cyfry nie mogą się powtarzać i liczba musi być większa od 400?

3. Ile jest różnych ustawień 9 osób w szereg takich, że wybrane 3 osoby stoją jedna po drugiej?

4. Ile jest różnych sposobów posadzenia n osób przy okrągłym stole? Dwa usadzenia uznajemy za takie same, jeżeli w obu każda osoba ma tych samych sąsiadów.

5. Spośród uczniów klasy 2a należy wybrać czteroosobowy samorząd. Na ile sposobów można to zrobić? Na ile sposobów można wybrać czteroosobowy samorząd tak, aby należała do niego co najmniej jedna dziewczyna i co najmniej jeden chłopak?

6. Wyznacz liczbę ciągów (a_1, a_2, a_3, a_4) takich, że $a_i \in \mathbb{N}$ oraz $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 10$.

7. Na płaszczyźnie danych jest 14 prostych, z których żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. Ile jest trójkątów, których boki należą do tych prostych?

8. Ile różnych prostokątów można utworzyć z pól szachownicy 8×8 ?

9. Ile jest permutacji zbioru $\{1, 2, 3, \dots, 31\}$ takich, że iloczyn każdych dwóch sąsiadnich liczb jest parzysty?

10. Na ile sposobów można wypełnić kupon totolotka (zakreślamy 6 liczb od 1 do 49) tak, że zakreślone zostaną co najmniej 2 kolejne liczby?

11. Na ile sposobów można posadzić na 25 miejscowej ławie 10 panów i 15 pań tak, aby między każdymi dwoma panami siedziała co najmniej jedna pani?

12. Na ile sposobów można podzielić zbiór 12 elementowy na 6 rozłącznych podzbiorów 2-elementowych?

13. Na ile sposobów można rozmieścić 9 studentów w 3 pokojach trzyosobowych, gdy
(a) każdy może dzielić pokój z każdym,
(b) pewnych dwóch studentów nie chce mieszkać razem,
(c) pewnych dwóch studentów chce mieszkać razem?

14. Podaj kombinatoryczne dowody tożsamości (a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
(b) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ (c) $k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$ (d) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

15. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij tożsamości: (a) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$

(b) $\sum_{k=0}^m \binom{n+k}{k} = \binom{n+m+1}{m}$, $n, m \in \mathbb{N}$ (c) $\sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k} 2^{n-k} = 2^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$.

16. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że liczba ciągów m -wyrazowych $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ takich, że $a_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ oraz $a_1 + a_2 + \dots + a_m = n$ wynosi $\binom{m+n-1}{m-1}$.

17. Niech $n, k \in \mathbb{N}$. Filemon i Bonifacy zapisują ciągi liczb całkowitych:

- Filemon zapisuje wszystkie ciągi $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ takie, że $|a_1| + \dots + |a_n| \leq k$.
- Bonifacy zapisuje wszystkie ciągi $(b_1, b_2, \dots, b_k)$ takie, że $|b_1| + \dots + |b_k| \leq n$.

Udowodnij, że obaj zapiszą tyle samo ciągów.

Powótrzenie

Zakres: nierówność Cauchy'ego - Schwarz'a, wzór Legendre'a, kombinatoryka.

1. Liczby a, b, c są dodatnie. Udowodnij nierówność

$$\frac{a\sqrt{b^2 + c^2} + b\sqrt{c^2 + d^2} + c\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2 + c^2} \leq \sqrt{2}.$$

2. Niech $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ i $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1$ Udowodnij, że

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n + a_n a_1 \geq -1.$$

3. Udowodnij, że dla dowolnych liczb naturalnych m, n, q liczba

$$\frac{(3m)! \cdot (3n)! \cdot (3q)!}{(m!)^2 \cdot (n!)^2 \cdot (q!)^2 \cdot (m+n+q)!}$$

jest całkowita.

4. Wybrano 16 liczb ze zbioru $\{1, 2, \dots, 30\}$. Wykaż, że pewne dwie różnią się o 3.

5. Liczby a, b, c, d są całkowite. Wykaż, że iloczyn

$$(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

jest podzielny przez 12.

6. Udowodnij, że ze zbioru 102 różnych liczb całkowitych można wybrać dwie, których suma lub różnica dzieli się przez 200.

7. Każde pole tabeli o 2 wierszach i 10 kolumnach kolorujemy jednym z 10 kolorów. Ile jest pokolorowań tabeli takich, że pola w każdym wierszu są różnych kolorów?

8. Oblicz, na ile sposobów można zapisać w jednym rzędzie cyfry 0, 1, 2, ..., 9 tak, aby

- (a) 0 i 1 występowały obok siebie,
- (b) 0 i 1 nie występowały obok siebie,
- (c) 0, 1 i 2 nie występowały obok siebie,
- (d) ani 0 i 1, ani 8 i 9 nie występowały obok siebie.

9. Na ile sposobów można wybrać 4 uczniów z 2 klas liczących 28 osób tak, aby z każdej klasy został wybrany przynajmniej jeden uczeń?

10. Na ile sposobów można 28 osobową klasę podzielić na 7 - osobowe drużyny oznaczone kolorami niebieskim, zielonym, czerwonym i żółtym?

11. W turnieju tenisowym bierze udział $2n$ tenisistów. W 1. rundzie ma być rozegranych jednocześnie n pojedynków. Na ile sposobów można podzielić wszystkich tenisistów na n par przeciwników?

12. Wyznacz liczbę ciągów (a, b, c, d) takich, że $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ oraz (a) $a+b+c+d = 300$, (b) $3a + 3b + 3c + d = 300$.

13. Niech $n \in \mathbb{N}$. Wyznacz liczbę ciągów długości n o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, 2, 3\}$, w których liczba 0 występuje (a) parzystą, (b) nieparzystą ilość razy.

14. Niech $m, r \in \mathbb{N}$, $m > r$. Udowodnij tożsamość

$$\sum_{k=r}^m \binom{m}{k} \binom{k}{r} (-1)^k = 0.$$

Ciągi arytmetyczne i geometryczne

Definicja. Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n=1}^m$ (gdzie $m > n$ lub $m = \infty$) jest *ciągami (postępem) arytmetycznym* jeżeli istnieje liczba d taka, że dla każdego n zachodzi $a_{n+1} = a_n + d$. Liczbę d nazywamy wówczas *przyrostem* lub *różnicą* ciągu (a_n) .

Tw. 1. Niech $(a_n)_{n=1}^m$, gdzie $m \in \mathbb{N}$ i $m > 2$ lub $m = \infty$, będzie ciągiem liczbowym. Następujące warunki są równoważne:

- (i) Ciąg $(a_n)_n$ jest arytmetyczny.
- (ii) Dla każdego n takiego, że $1 < n < m$ zachodzi $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.
- (iii) Dla każdego $n \geq 1$ zachodzi $\sum_{k=1}^n a_k = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

Tw. 2. Jeżeli $(a_n)_n$ jest ciągiem arytmetycznym z przyrostem d , to dla $k \geq 1$ zachodzi $a_k = a_1 + (k-1)d$ oraz $\sum_{k=1}^n a_k = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$.

Definicja. Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n=0}^m$ (gdzie $m \in \mathbb{N}$ lub $m = \infty$) jest *ciągami (postępem) geometrycznym*, jeżeli $a_0 \neq 0$ i istnieje stała $q \neq 0$ taka, że dla każdego n zachodzi $a_{n+1} = qa_n$. Liczbę q nazywamy *ilorazem* ciągu (a_n) .

Tw. Jeżeli $(a_n)_{n=0}^\infty$ jest ciągiem geometrycznym z ilorazem q , to dla $k \geq 0$ zachodzi $a_k = q^k \cdot a_0$ oraz, gdy $q \neq 1$

$$\sum_{j=0}^k a_j = a_0 \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}.$$

1. Oblicz sumę pierwszych stu liczb naturalnych, które przy dzieleniu przez 11 dają resztę 7.
2. Ciąg $(x_n)_{n=1}^\infty$ jest arytmetyczny. Wykaż, że ciąg o wyrazach (a) $a_n = x_{n+1}^2 - x_n^2$, (b) $b_n = x_n + x_{n+1} + \dots + x_{n+r}$, gdzie $r \in \mathbb{N}$ jest ustalone, też jest ciągiem arytmetycznym.
3. Niech S_n oznacza sumę początkowych n wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego. Udowodnij, że $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$.
4. W pewnej rodzinie każde z pięciorga dzieci dostaje na urodziny, począwszy od piątych, tyle książek, ile w danym dniu kończy lat. Liczby wyrażające wiek dzieci tworzą ciąg arytmetyczny o przyroście 3. Zbiór książek wszystkich dzieci składa się z 325 tomów. Ila lat ma każde z dzieci?
5. Pola kwadratowych kartek papieru tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym pierwsza ma pole równe 12 cm^2 , a piąta 30 cm^2 . Kartki pocięto na kawałki, z których ułożono kwadrat o boku 21 cm. Ile było kartek?
6. Ciąg arytmetyczny $(a_n)_{n \geq 1}$ ma wszystkie wyrazy dodatnie. Udowodnij, że dla każdego n zachodzi $\sqrt{a_1 a_n} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{1}{2}(a_1 + a_n)$.

7. Wyrazy nieskończonego ciągu arytmetycznego są liczbami naturalnymi i pewien wyraz tego ciągu jest kwadratem. Wykaż, że nieskończenie wiele wyrazów tego ciągu jest kwadratami.
8. Wyrazy ciągu $(a_n)_{n=1}^\infty$ są różne od 0. Wykaż, że (a_n) jest ciągiem arytmetycznym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}.$$

9. Zbiór liczb naturalnych podzielono na kilka nieskończonych ciągów arytmetycznych. Wykaż, że pierwszy wyraz jednego z tych ciągów jest podzielny przez jego przyrost.
10. Dany jest rosnący ciąg arytmetyczny taki, że iloczyn dowolnych dwóch wyrazów tego ciągu też jest wyrazem tego ciągu. Wykaż, że wszystkie wyrazy tego ciągu są liczbami całkowitymi.
11. Ciąg $(a_k)_{k=0}^\infty$ jest arytmetyczny, $n \in \mathbb{N}$. Wykaż, że $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} a_k = 0$.
12. Wyznacz liczby a, b, c, d takie, że ciąg (a, b, c, d) jest geometryczny, natomiast ciąg $(a+1, b+1, c+4, d+13)$ jest arytmetyczny.
13. Znajdź wszystkie pary liczb rzeczywistych α, β takie, że ciąg $(1, \alpha, \beta)$ jest arytmetyczny i ciąg $(\alpha, \beta, \alpha + \beta)$ jest geometryczny.
14. Czy istnieje ciąg (a) arytmetyczny, (b) geometryczny, którego pewne trzy wyrazy to liczby $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$?
15. **Nierówność Euklidesa.** Liczby dodatnie a, b, c, d są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego o ilorazie $q \neq 1$. Udowodnij, że $a + d > b + c$.
16. Ciąg (a, b, c, d) jest geometryczny, $a + d = 10$, $ad = 7$. Oblicz $b^3 + c^3$.
17. Boki trójkąta tworzą postęp geometryczny. W jakim przedziale może się zmieniać iloraz tego postępu?
18. Ciąg $(a_n)_n$ jest geometryczny i $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Udowodnij, że $S_n \cdot (S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$.
19. Ciąg $(a_n)_{n=1}^\infty$ jest geometryczny z ilorazem q . Wyraż sumę $\sum_{k=1}^n k a_k$ przez a_1 i q .
20. Dany jest ciąg liczbowy $(b_n)_{n=0}^\infty$, $c_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$ i ciąg $(c_n)_{n=0}^\infty$ jest geometryczny i nie jest stały. Wykaż, że ciąg $(b_n)_{n=0}^\infty$ też jest geometryczny.
21. Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ zbiór odwrotności wszystkich liczb naturalnych zawiera wyrazy pewnego nie stałego ciągu arytmetycznego długości n . Wykaż, że zbiór ten nie zawiera wyrazów nieskończonego nie stałego ciągu arytmetycznego.
22. **Tw. Bernoulliego.** Dane są ciągi arytmetyczny $(a_n)_{n=0}^\infty$ i geometryczny $(b_n)_{n=0}^\infty$ takie, że $0 < a_0 = b_0 < a_1 = b_1$. Udowodnij, że $a_n < b_n$ dla każdego $n \geq 2$.

Ciągi rekurencyjne

Definicja. Mówimy, że ciąg liczb $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ jest *ciągami liniowo rekurencyjnym rzędu 1*, jeżeli istnieją stałe a, b takie, że $x_{n+1} = ax_n + b$ dla $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Jeżeli $a = 0$, to ciąg $(x_n)_n$ jest stały; jeżeli $a = 1$, to jest to ciąg arytmetyczny; jeżeli $b = 0$, to geometryczny.

Tw. 1. Jeżeli $a \neq 0, 1$ i $b \neq 0$ oraz $x_{n+1} = ax_n + b$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$, to

$$x_n = a^n \left(x_0 + \frac{b}{a-1} \right) - \frac{b}{a-1}.$$

Definicja. Ciąg liczb rzeczywistych $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ spełniający równanie rekurencyjne

$$x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n + r, \quad p, q, r \in \mathbb{R}, q \neq 0, n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

nazywamy *ciągami liniowo rekurencyjnym rzędu 2*. Jeżeli dodatkowo $r = 0$, to nazywamy go *jednorodnym ciągiem liniowo rekurencyjnym rzędu 2*.

Tw. 2. Niech $(x_n)_n$ będzie jednorodnym ciągiem liniowo rekurencyjnym rzędu 2 (czyli $r = 0$). Równanie $\lambda^2 = p\lambda + q$ nazywamy *równaniem charakterystycznym* ciągu (x_n) . Wówczas

- (i) jeżeli równanie charakterystyczne ma 2 różne pierwiastki $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ to istnieją liczby $a, b \in \mathbb{R}$ takie, że $x_n = a\lambda_1^n + b\lambda_2^n$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$;
- (ii) jeżeli równanie charakterystyczne ma 1 pierwiastek λ_1 , to istnieją liczby $a, b \in \mathbb{R}$ takie, że $x_n = (a + bn)\lambda_1^n$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$

1. Znajdź jawny wzór na n -ty wyraz ciągu:

- (a) $x_0 = 0, x_{n+1} = -\frac{1}{2}x_n + 1$;
- (b) $x_0 = -2, x_{n+1} = 3x_n - 2$;
- (c) $f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$;
- (d) $a_0 = 1, a_1 = 3, a_{n+2} = -a_{n+1} + 6a_n$;
- (e) $x_0 = 2, x_1 = -3, x_{n+2} = 6x_{n+1} - 9x_n$;
- (f) $y_0 = 0, y_1 = 20, y_{n+2} = -2y_{n+1} + 8y_n + 10$;
- (g) $u_1 = 0, u_2 = 6, u_{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2}u_{n+1} + \frac{3n}{n+2}u_n$.
- (h) $a_0 = \frac{1}{2}, a_1 = \frac{1}{3}, a_{n+2} = \frac{a_n a_{n+1}}{3a_n + 4a_{n+1}}$.

2. Ciągi $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ i $(y_n)_{n=0}^{\infty}$, gdzie $x_0 = \alpha, y_0 = \beta$, spełniają zależności

$$x_{n+1} = 2y_n + 1, \quad y_{n+1} = 2x_n - 3, \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Znajdź jawne wzory na x_n i y_n .

3. Na ile sposobów można pokryć prostokąt o wymiarach $2 \times n$ płytkami o rozmiarze

- (a) 2×1 , (b) 2×1 i 2×2 ?

- 4. Ciąg $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ jest zdefiniowany następująco: $x_0 = 0$ i $x_{n+1} = 5x_n + \sqrt{24x_n^2 + 1}$. Wykaż, że ciąg $(x_n)_n$ jest jednorodnym ciągiem liniowo rekurencyjnym rzędu 2, znajdź jawny wzór na x_n i wykaż, że każdy wyraz ciągu x_n jest liczbą całkowitą.
- 5. Ciąg $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ jest zdefiniowany następująco: $x_0 = 1$ i $x_{n+1} = 3x_n + \lfloor x_n \sqrt{5} \rfloor$. Wykaż, że $(x_n)_n$ jest jednorodnym ciągiem liniowo rekurencyjnym rzędu 2 i znajdź jawny wzór na x_n .
- 6. Ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest zadany następująco: $a_0 = 0, a_1 = 1$ oraz $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$. Wykaż, że $2^k \mid a_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $2^k \mid n$.
- 7. Wyznacz wszystkie funkcje $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że $f(0) = 0$ i $f(x) = 1 + 5f\left(\lfloor \frac{x}{2} \rfloor\right) - 6f\left(\lfloor \frac{x}{4} \rfloor\right)$.
- 8. Liczba rzeczywista $a \neq 0$ spełnia zależność $\{a\} + \{a^{-1}\} = 1$. Udowodnij, że $\{a^n\} + \{a^{-n}\} = 1$ dla każdej liczby naturalnej n .
- 9. Znajdź jawny wzór na n -ty wyraz ciągu:
 - (a) $a_0 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + na_n}$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$,
 - (b) $a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n + 2^n$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$,
 - (c) $a_0 = 3, a_1 = 1, a_{n+2} = 3a_{n+1} + a_n + 3 \cdot 2^n$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$
- 10. Dla jakich wartości x_0 ciąg spełniający zależność rekurencyjną $x_{n+1} = 2x_n(1-x_n)$ jest rosnący?
- 11. Permutację p zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ nazywamy *inwolucją*, jeżeli $p(p(k)) = k$ dla $k = 1, 2, \dots, n$. Niech a_n oznacza liczbę takich involucji. Znajdź zależność rekurencyjną na a_n .
- 12. Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zdefiniowany przez warunki $a_1 = 1$ i $a_{n+1} = a_n^2 + a_n$ dla $n \geq 1$. Udowodnij, że dla każdego n zachodzi $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k + 1} < 1$.
- 13. Ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ spełnia $x_1 = x_2 = 1, x_3 = 4$ oraz $x_{n+3} = 2x_{n+2} + 2x_{n+1} - x_n$. Udowodnij, że każdy wyraz tego ciągu jest kwadratem liczby naturalnej.
- 14. Udowodnij, że każdy wyraz ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ określonego przez warunki $a_1 = a_2 = 1, a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 2}{a_{n-2}}$ dla $n = 2, 3, 4, \dots$ jest liczbą całkowitą.
- 15. Ciąg liczb dodatnich $(x_n)_n$ spełnia równanie rekurencyjne $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1}$. Udowodnij, że pewien wyraz tego ciągu jest liczbą niewymierną.
- 16. Ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ spełnia dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych $m \geq n$ zależność $2(a_{m+n} + a_{m-n}) = a_{2m} + a_{2n}$ oraz $a_1 = 1$. Wyznacz a_n .
- 17. Dany jest ciąg rekurencyjny $(a_n)_{n=1}^{\infty}$: $a_1 = 1$ oraz $a_{2n} = a_n + 1, a_{2n+1} = \frac{1}{a_{2n}}$ dla $n \geq 1$. Udowodnij, że każda liczba wymierna dodatnia wystąpi w tym ciągu dokładnie jeden raz.
- 18. Dla $n \in \mathbb{N}$ niech F_n oznacza n -ty wyraz ciągu Fibonacciego. Udowodnij, że $F_{2n} = (F_{n+1})^2 - (F_{n-1})^2$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$.

Powtórzenie – ciągi

1. Ciąg (a, b, c) jest arytmetyczny. Wykaż, że $3(a^2 + b^2 + c^2) = 6(a - b)^2 + (a + b + c)^2$.
2. Znajdź wszystkie ciągi arytmetyczne z przyrostem 6 składające się z 5 liczb pierwszych.
3. Czy istnieje nieskończony rosnący ciąg arytmetyczny, którego wszystkie wyrazy są liczbami pierwszymi?
4. Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem arytmetycznym o pierwszym wyrazie $a_1 = a$ i przyroście d . Oblicz sumy

$$(a) \sum_{k=1}^n a_k^2$$

$$(b) \sum_{k=1}^n a_k a_{k+1}$$

$$(c) \sum_{k=1}^n k a_k$$

5. Skończony ciąg arytmetyczny (a_n) ma nieparzystą liczbę wyrazów. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 165, a suma wyrazów o nieparzystych numerach jest równa 88. Z ilu wyrazów składa się ciąg (a_n) ?
6. Niech $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, wyrazy ciągu arytmetycznego $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ są dodatnie i ich suma jest równa S . Wykaż, że

$$\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} + \sqrt[3]{a_2 a_3 a_4} + \dots + \sqrt[3]{a_{n-2} a_{n-1} a_n} \leq \frac{n-2}{n} S.$$

7. Dany jest ciąg arytmetyczny $(a_k)_{k=0}^{2022}$, przy czym $0 < a_0 < a_1$. Rozstrzygnij, która liczba jest większa

$$(a_0 + a_1) \cdot (a_1 + a_2) \cdot \dots \cdot (a_{2021} + a_{2022}) \quad \text{czy} \quad (a_0 + a_{2022})^{2022}.$$

8. Wyznacz liczby a, b, c, d takie, że ciąg (a, b, c, d) jest geometryczny, $a + b + c + d = 130$ i $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 5044$.
9. Ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest ciągiem geometrycznym o pierwszym wyrazie $a_0 = a > 0$ i ilorazie $q > 0$. Oblicz sumy

$$(a) \sum_{k=0}^n k a_k (a_k + 1),$$

$$(b) \sum_{k=0}^n a_k a_{k+1},$$

$$(c) \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}}.$$

10. Dla jakich wartości x, y, z ciąg (x, y, z) jest geometryczny, a ciągi

$$(4x - 4, 2y - 2, z - 1) \quad \text{i} \quad (x + 5, y + 3, z - 15)$$

są arytmetyczne?

11. Ciąg (a, b, c) jest geometryczny. Ciąg $(3a + 3, 2b, c - 12)$ jest arytmetyczny i suma jego dwóch pierwszych wyrazów jest równa trzeciemu. Oblicz a, b, c .
12. Ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest arytmetyczny. Wykaż, że istnieją ciągi arytmetyczny $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ i geometryczny $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ takie, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k = b_n c_n.$$

13. Ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest arytmetyczny, a ciąg $(b_n)_n$ jest geometryczny z ilorazem q . Udowodnij, że ciąg o wyrazach $c_n = a_n b_n$ jest ciągiem jednorodnym liniowo – rekurencyjnym rzędu 2 i wyznacz równanie rekurencyjne tego ciągu.
14. Ciąg $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest zadany przez warunki:

$$a_0 = \frac{1}{4}, \quad a_1 = \frac{1}{6}, \quad \text{oraz} \quad a_{n+1} = \frac{a_n a_{n+1}}{3a_n + 10a_{n+1}} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Wyznacz a_{2022} i oblicz sumę $\sum_{n=0}^{2022} \frac{1}{a_n}$.

15. Niech F_n oznacza n -ty wyraz ciągu Fibonacciego. Wykaż, że ciąg

$$a_n = 5F_n^2 + 2 \cdot (-1)^n$$

jest jednorodnym ciągiem liniowo – rekurencyjnym rzędu 2.

16. Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zdefiniowany przez warunki

$$a_1 = 1 \quad \text{i} \quad a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 - 2} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Udowodnij, że każdy wyraz tego ciągu jest liczbą całkowitą i wyznacz a_{2023} .

17. Ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zadany przez warunki

$$a_1 = \frac{3}{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{3a_n - 2} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Udowodnij, że ciąg ten jest rosnący i $a_n < 2$ dla każdego n .

18. Ciąg $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ spełnia warunki:

$$x_0 > 1 \quad \text{oraz} \quad x_{n+1} = \frac{2x_n}{1 + x_n}.$$

Udowodnij, że ciąg ten jest malejący i $x_n > 1$ dla każdego n .

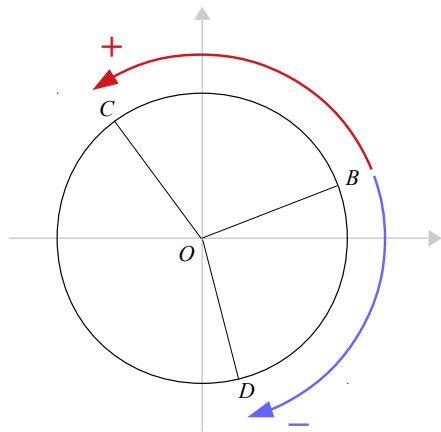
Funkcje trygonometryczne I

Definicja. Niech $D \subset \mathbb{R}$, X to pewien zbiór. Mówimy, że funkcja $f : D \rightarrow X$ jest okresowa z okresem $T > 0$, jeżeli dla każdego $x \in D$ zachodzi równość $f(x+T) = f(x)$. Liczbę T nazywamy okresem funkcji f . Najkrótszy okres funkcji f nazywamy jej *okresem podstawowym*.

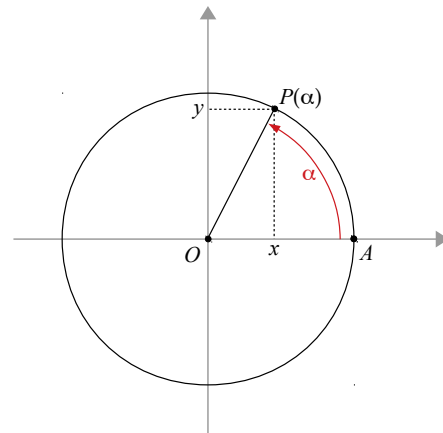
Miara kąta skierowanego

Niech S oznacza okrąg o promieniu 1 (zwany okręgiem jednostkowym), który został umieszczony w układzie współrzędnych na płaszczyźnie tak, że jego środek znajduje się w punkcie $O = (0, 0)$. Na tym okręgu wybrano dwa punkty B i C . *Miarę (łukową) kąta skierowanego* $\angle BOC$ określamy za pomocą długości łuku okręgu od punktu B do punktu C , przy czym:

- jeżeli od B do C idziemy w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, to miara kąta jest dodatnia i równa długości łuku od punktu B do punktu C ;
- jeżeli od B do C idziemy w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, to miara kąta jest ujemna i równa długości łuku od punktu B do punktu C pomnożonej przez -1 .



$\angle BOC > 0$ i $\angle BOD < 0$



Funkcja $P : \mathbb{R} \rightarrow S$

Na okręgu S ustalmy punkt $A = (1, 0)$. Każdej liczbie rzeczywistej α możemy przyporządkować punkt $P(\alpha)$ na okręgu S w taki sposób, że miara łukowa kąta skierowanego $\angle AOP(\alpha)$ jest równa α :

- $P(0) = A$;
- jeżeli $\alpha > 0$, to idziemy się po okręgu od punktu A w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara aż przejdziemy drogę długości α , dochodząc do punktu $P(\alpha)$;

- jeżeli $\alpha < 0$, to idziemy po okręgu od punktu A w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara aż przejdziemy drogę długości $-\alpha$, dochodząc do punktu $P(\alpha)$.

Fakt. Funkcja $P : \mathbb{R} \rightarrow S$ jest okresowa i jej okres jest równy 2π . Ponadto, jeżeli $\alpha \in [0, 2\pi)$, to funkcja $\alpha \mapsto P(\alpha)$ jest bijekcją.

Sinus, cosinus, tangens i cotangens

Niech $\alpha \in \mathbb{R}$ i przyjmijmy, że punkt $P(\alpha)$ ma współrzędne (x, y) . Definiujemy następujące funkcje, zwane funkcjami *trygonometrycznymi*:

- | | |
|--|--|
| (i) sinus: $\sin \alpha = y$; | (iii) tangens: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$, ($x \neq 0$); |
| (ii) cosinus: $\cos \alpha = x$; | (iv) cotangens: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$, ($y \neq 0$). |

Stw. 1 (własności sinusa). Funkcja $\sin(\alpha)$ jest określona dla każdej liczby $\alpha \in \mathbb{R}$ i

- jej zbiór wartości to przedział $[-1, 1]$;
- jest okresowa i jej okres podstawowy wynosi 2π ;
- jest nieparzysta;
- jest rosnąca na przedziałach $[(2k - \frac{1}{2})\pi, (2k + \frac{1}{2})\pi]$ i malejąca na przedziałach $[(2k + \frac{1}{2})\pi, (2k + \frac{3}{2})\pi]$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stw. 2 (własności cosinusa). Funkcja $\cos(\alpha)$ jest określona dla każdej liczby $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz

- jej zbiór wartości to przedział $[-1, 1]$;
- jest okresowa i jej okres podstawowy wynosi 2π ;
- jest parzysta;
- jest malejąca na przedziałach $[2k\pi, (2k + 1)\pi]$ i rosnąca na przedziałach $[(2k + 1)\pi, (2k + 2)\pi]$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stw. 3 (własności tangensa). Funkcja $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ jest określona dla każdej liczby $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{(k + \frac{1}{2})\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ oraz

- jej zbiór wartości to cały zbiór liczb rzeczywistych;
- jest okresowa i jej okres podstawowy wynosi π ;
- jest nieparzysta;
- jest rosnąca na przedziałach $((k - \frac{1}{2})\pi, (k + \frac{1}{2})\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stw. 4 (własności cotangensa). Funkcja $\operatorname{ctg}(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ jest określona dla każdej liczby $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ oraz

- jej zbiór wartości to cały zbiór liczb rzeczywistych;
- jest okresowa i jej okres podstawowy wynosi π ;
- jest nieparzysta;
- jest malejąca na przedziałach $(k\pi, (k + 1)\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Stw. 5 (jedynka trygonometryczna). Dla każdej liczby rzeczywistej α

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Stw. 6 (wzory redukcyjne).

- $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha) = -\sin(\pi + \alpha)$
- $\cos \alpha = -\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\pi + \alpha)$
- $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha$
- $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = -\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \sin \alpha$

Stw. 7. (Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy)

- $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$
- $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$
- $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$
- $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$
- $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$
- $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha}$
- $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}$

Stw. 8. (Sinus i cosinus podwójonego i potrojonego kąta)

- $\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$
- $\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$
- $\sin(3\theta) = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$
- $\cos(3\theta) = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$

Stw. 9. (Zamiana sumy funkcji sinus i cosinus na iloczyn)

- $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$
- $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)$
- $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$
- $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$

Stw. 10. (Zamiana iloczynu funkcji sinus i cosinus na sumę)

- $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$
- $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$
- $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$

Stw 11. (Wyrażenie za pomocą $t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$) Dla $\alpha \neq (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\sin \alpha = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos \alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2t}{1 - t^2}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - t^2}{2t}.$$

Najważniejsze wartości:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\times$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

1. Uzupełnij wartości w tabeli:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
stopnie												
$\sin \alpha$												
$\cos \alpha$												
$\operatorname{tg} \alpha$												
$\operatorname{ctg} \alpha$												

2. Zbadaj znaki liczb $\sin \frac{\pi}{5}, \cos \frac{9\pi}{13}, \operatorname{tg} \frac{21\pi}{8}, \operatorname{tg} 1, \cos(\sin 4), \operatorname{tg}(\cos 1)$.
3. Porównaj pary liczb: (a) $\sin 1$ i $\cos 1$, (b) 1 i $\cos \alpha + \sin \alpha, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
4. Znajdź funkcję $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że $\operatorname{ctg} = \operatorname{tg} \circ f$.
5. Uprość wyrażenia:

- (a) $\sqrt{1 - \cos^2 t}, \sqrt{1 - \sin^2 t},$ (d) $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma} + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \gamma},$
- (b) $\operatorname{tg}^2 \theta - \frac{1}{\cos^2 \theta},$
- (c) $\sin^4 \phi + 2 \sin^2 \phi \cos^2 \phi + \cos^4 \phi,$ (e) $\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$
- (f) $\sqrt{\sin^4 x + 4 \cos^2 x} - \sqrt{\cos^4 x + 4 \sin^2 x}$

6. Rozwiąż równania: (a) $|\sin x| = \frac{1}{2},$ (b) $|\sin x| + |\cos x| = 1,$ (c) $|\sin x| = |\cos x|,$ (d) $\sin \frac{x}{2} = 1 + |\sin x|,$ (e) $|\sin x - \cos x| = |\sin x| + |\cos x|.$
7. Dla jakich wartości parametru m równanie $\sin^2 x + \sin x + m = 0$ ma rozwiązanie?
8. Załóżmy, że $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \frac{\pi}{2}$. Udowodnij nierówność

$$\operatorname{tg} x_1 < \frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \dots + \sin x_n}{\cos x_1 + \cos x_2 + \dots + \cos x_n} < \operatorname{tg} x_n.$$

9. Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej α takiej, że $|\sin \alpha| \neq 1$

$$\sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}} + \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} = \frac{2}{|\cos \alpha|}.$$

10. Dane są liczby rzeczywiste a, b i x takie, że $\frac{\sin^4 x}{a} + \frac{\cos^4 x}{b} = \frac{1}{a + b}.$

- (a) Wyraż $\sin^2 x$ i $\cos^2 x$ poprzez a i b .
- (b) Pokaż, że dla każdej liczby naturalnej n

$$\frac{\sin^{2n} x}{a^{n-1}} + \frac{\cos^{2n} x}{b^{n-1}} = \frac{1}{(a + b)^{n-1}}.$$

Funkcje trygonometryczne II

- Oblicz wartości funkcji $\sin$ i $\cos$ dla argumentów: $\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{8}, \frac{-17\pi}{8}, \frac{19\pi}{12}$.
- Oblicz $\cos^4 \frac{\pi}{24} - \sin^4 \frac{\pi}{24}$.
- Dla danych liczb rzeczywistych a i b wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = a \sin x + b \cos x$.
- Udowodnij, że $(1 - \operatorname{ctg}(23^\circ))(1 - \operatorname{ctg}(22^\circ)) = 2$.
- Zamień sumę $\sin(x - y) + \sin(y - z) + \sin(z - x)$ na iloczyn.
- Niech $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$ i $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$. Wykaż, że $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \alpha = 1$.
- Udowodnij nierówności:
 - $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$;
 - $|\sin x| \leq |x|$ dla $x \in \mathbb{R}$;
 - $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ dla $x, y \in \mathbb{R}$;
 - $\frac{\sin x + \sin y}{2} \leq \sin \left(\frac{x + y}{2} \right)$ dla $0 \leq x, y \leq \pi$.
 - $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{2} \geq \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)$ dla $0 \leq \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$.
- Udowodnij, że funkcja $f(x) = x + \sin x$ (dla $x \in \mathbb{R}$) jest rosnąca.
- Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = (\cos x + 1)(\sin x + 1)$.
- Niech $x \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$.
- Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste a takie, że funkcja $f(x) = |\sin ax + \cos x|$ przyjmuje wartość 2.
- Rozwiąż równania
 - $2 \sin^2 x + \sin x = 1$;
 - $\cos(2x) - \cos x = 0$;
 - $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$;
 - $\sin(2x) \sin x = \cos x$;
 - $\sin(2x) - \sqrt{3} \cos x = 0$;
 - $\cos x - \cos(3x) = \sin(3x) - \sin x$;
 - $\operatorname{tg} x = 2 \cos \frac{x}{2}$;
 - $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$;
 - $\sin^2 x + \frac{1}{2} \sin^2(2x) = 1$;
 - $\sin x \cdot \sin(3x) = \frac{1}{2}$;
 - $\sin^3 x + \cos^3 x = 0$;
 - $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$;
 - $2 \cos^3 x + 3 \sin^2 x = 2$;
 - $4 \sin(4x) \cos(6x) = 2 \sin(10x) + 1$;
 - $6 \sin x + 2\sqrt{3} \cos x + 3 \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$;

13. Rozwiąż nierówności w przedziale $[0, 2\pi]$:

- $\cos x > \frac{1}{2}$;
- $\operatorname{ctg} x \geq -\sqrt{3}$;
- $\sin x > \cos x$;
- $\cos x + \operatorname{tg} x < 1 + \sin x$;
- $2 \sin^2(x) + \sin^2(2x) < 2$
- $\operatorname{tg}(2x) - \operatorname{ctg}(2x) > \frac{2}{\sqrt{3}}$;
- $\operatorname{ctg} x < 2 - \frac{\sin x}{1 + \cos x}$;
- $\cos 4x + 2 \cos^2 x \geq 1$.
- $\sin x - \cos x \geq 1$.

14. Sprawdź tożsamości

- $\frac{\cos \alpha - \cos 3\alpha}{\sin 3\alpha - \sin \alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$,
- $\sin 7\alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{7\alpha}{2} + \cos 7\alpha = 1$,
- $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + \frac{3}{4} \sin^2 \alpha = 1$,
- $\cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 4\alpha \sin \alpha = \cos 3\alpha \cos 2\alpha$.
- $4(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) = 1 + \cos^2 2\alpha$,
- $2 \sin^4 \alpha + 2 \cos^4 \alpha = 1 + \cos^2 2\alpha$,
- $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$,

15. Udowodnij tożsamości

- $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \cdot \sin \frac{\gamma + \alpha}{2} + \sin(\alpha + \beta + \gamma)$,
- $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 4 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \cdot \cos \frac{\gamma + \alpha}{2} - \cos(\alpha + \beta + \gamma)$.

16. Oblicz

- $\cos \frac{\pi}{9} \cdot \cos \frac{2\pi}{9} \cdot \cos \frac{4\pi}{9}$
- $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$
- $\sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ$
- $\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7}$
- $\cos 10^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ$,
- $\sin \frac{\pi}{18} \sin \frac{3\pi}{18} \sin \frac{5\pi}{18} \sin \frac{7\pi}{18} \sin \frac{9\pi}{18}$,

17. (a) Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n i liczby rzeczywistej α zachodzi nierówność $|\sin n\alpha| \leq n |\sin \alpha|$.(b) Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n i liczb rzeczywistych α, β zachodzi nierówność $|\cos n\alpha - \cos n\beta| \leq n^2 |\cos \alpha - \cos \beta|$.18. Udowodnij, że jeśli $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma$, to $\alpha + \beta + \gamma = k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.19. Załóżmy, że $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$ i $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. Udowodnij, że $\alpha + \beta + \gamma < \pi$.20. Udowodnij, że dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność

$$|\cos x| + |\cos 2x| + |\cos 4x| + \dots + |\cos 2^n x| \geq \frac{n}{2}.$$

21. Znajdź wzór na sumę $\sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{tg} kx \cdot \operatorname{tg} (k+1)x$.

Liczby zespolone I

Liczba zespolona jest to para uporządkowana liczb rzeczywistych (a, b) . Zbiór wszystkich liczb zespolonych oznaczamy symbolem $\mathbb{C}$.

Na zbiorze $\mathbb{C}$ są określone działania

- *dodawanie*: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, z elementem neutralnym $0 = (0, 0)$;
- *mnożenie*: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$, z elementem neutralnym $1 = (1, 0)$.

Stw. 1. Działania dodawania i mnożenia liczb zespolonych są przemienne i łączne, oraz mnożenie jest rozdzielne względem dodawania. Z tego wynika, że dla liczb zespolonych zachodzą wzory skróconego mnożenia i wzór dwumianowy Newtona.

Liczbę zespoloną $(0, 1)$ nazywamy *jednostką urojoną* i oznaczamy symbolem i . Liczba i spełnia równość $i^2 = (-1, 0)$. Wykorzystując jednostkę urojoną i każdą liczbę zespoloną $z = (a, b)$ możemy zapisać w tzw. *postaci algebraicznej*:

$$z = a + bi.$$

Zachodzi $i^2 = -1 + 0i = -1$ (czyli i to pierwiastek kwadratowy z -1).

Stosując postać algebraiczną, każdą liczbę rzeczywistą można traktować jako liczbę zespoloną: $a = a + 0i$ dla $a \in \mathbb{R}$. Liczby zespolone postaci $(0, b) = bi$ nazywane są *liczbami urojonymi*.

Jeżeli $z = (a, b) = a + bi$ jest liczbą zespoloną, to

- liczbę rzeczywistą a nazywamy *częścią rzeczywistą* liczby zespolonej z i oznaczamy $\operatorname{Re} z = a$.
- liczbę rzeczywistą b nazywamy *częścią urojoną* liczby zespolonej z i oznaczamy $\operatorname{Im} z = b$.
- *moduł* liczby zespolonej z jest to liczba nieujemna $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- *sprzężeniem* liczby zespolonej z nazywamy liczbę zespoloną $\bar{z} = (a, -b) = a - bi$

Odwrotnością liczby zespolonej $z = (a, b) \neq 0$ jest liczba

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} \cdot i = \frac{1}{|z|^2} \cdot \bar{z}.$$

Stw. 2. Niech $z \in \mathbb{C}$. Wówczas

- (i) $z + \bar{z} = 2 \cdot \operatorname{Re} z$, (ii) $z - \bar{z} = 2i \cdot \operatorname{Im} z$, (iii) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Stw. 3. Niech $z, w \in \mathbb{C}$. Wówczas

- (i) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$, (v) $\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}$ (dla $w \neq 0$).
- (ii) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$, (vi) $|z + w| \leq |z| + |w|$,
- (iii) $\overline{\left(\frac{z}{w} \right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ (dla $w \neq 0$) (vii) $||z| - |w|| \leq |z - w|$,
- (iv) $|zw| = |z| \cdot |w|$,

Postać trygonometryczna liczby zespolonej: Każdą liczbę zespoloną $z \neq 0$ można zapisać w postaci

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad \text{gdzie } r = |z| > 0, \theta \in \mathbb{R}.$$

Liczbę θ nazywamy argumentem liczby zespolonej z . Dla $z \neq 0$, jeżeli $\theta \in [0, 2\pi)$, to mówimy, że θ jest *argumentem głównym* liczby z .

Stosowana jest również notacja $\cos \theta + i \sin \theta = \operatorname{cis} \theta = e^{i\theta}$. Pełny sens matematyczny zapisu $e^{i\theta}$ stanie się jasny kiedy indziej.

Stw. 4. Jeżeli $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ i $w = s(\cos \phi + i \sin \phi)$, gdzie $r, s > 0$, $\theta, \phi \in \mathbb{R}$, to

- (i) $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$, jeśli $z \neq 0$;
- (ii) $z \cdot w = rs \cdot (\cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi))$;
- (iii) $\frac{z}{w} = \frac{r}{s}(\cos(\theta - \phi) + i \sin(\theta - \phi))$;
- (iv) **(Wzór de Moivre'a)** Dla $n \in \mathbb{Z}$, $z \neq 0$ zachodzi

$$z^n = r^n \cdot (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)).$$

Tw. 5. (pierwiastki z liczby zespolonej). Niech $a = |a| \cdot \operatorname{cis} \phi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i $n \in \mathbb{N}$. Wszystkie liczby zespolone w spełniające równanie $w^n = a$ są postaci

$$w_k = \sqrt[n]{|a|} \left(\cos \left(\frac{2k\pi + \phi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{2k\pi + \phi}{n} \right) \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Liczby te nazywamy *zespolonymi pierwiastkami stopnia n z liczby zespolonej a* .

Uwaga 1. Liczby w_k są wszystkie różne, więc każda liczba zespolona $a \neq 0$ ma dokładnie n różnych pierwiastków stopnia n .

Uwaga 2. Ze względu na niejednoznaczność pierwiastków zespolonych, dla $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ **nie będziemy** stosować zapisu $\sqrt[n]{a}$ na oznaczenie którejkolwiek z liczb w_k .

Pierwiastki z jedności. Dla $a = 1$ otrzymujemy n różnych zespolonych pierwiastków z jedności stopnia n :

$$u_k = \cos \left(\frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

1. Sprowadź wyrażenia do postaci algebraicznej:

- (a) $(2 + i)(3 - i) + (2 + 3i)(3 + 4i)$, (d) $\frac{(5 + i)(7 - 6i)}{3 + i}$,
- (b) $\frac{(5 + i)(3 + i)}{2i}$, (e) $(3 + i)^3 + (3 - i)^3$,
- (c) $\frac{1}{5 - 4i} + \frac{3}{2 + i}$, (f) $\frac{(1 + i)^5}{(1 - i)^3}$,

2. Udowodnij, że

- liczba zespolona z jest liczbą rzeczywistą wtedy i tylko wtedy, gdy $z = \bar{z}$;
- liczba zespolona z jest liczbą urojoną wtedy i tylko wtedy, gdy $z = -\bar{z}$;

3. Niech $u = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Oblicz u^n dla $n \in \mathbb{Z}$ oraz $1 + u + u^2$, $1 + \bar{u} + \bar{u}^2$.

4. Niech $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Udowodnij równoważność warunków:

$$(i) |z| = 1, \quad (ii) \operatorname{Re} z = \frac{z^2 + 1}{2z}, \quad (iii) \operatorname{Im} z = \frac{z^2 - 1}{2iz}.$$

5. Niech $a, b \in \mathbb{C}$. Udowodnij, że $|a + b| = |a| + |b|$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a\bar{b}$ jest nieujemną liczbą rzeczywistą.

6. Rozwiąż w liczbach zespolonych równania:

$$\begin{array}{ll} (a) |z| - z = 1 + 2i, & (e) z^3 = \bar{z}, \\ (b) z^2 = i, & (f) z^2 + 2|z|^2 = 2, \\ (c) z^2 = 3 - 4i, & (g) z^3 + |z|^2 + z = 0, \\ (d) z^2 = \bar{z}, & \end{array}$$

7. Naskicuj na płaszczyźnie zespolonej poniższe zbiory:

$$\begin{array}{l} (a) \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}; \\ (b) \{z \in \mathbb{C} : |z + i| \leq 1\}; \\ (c) \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 2\}; \\ (d) \{z \in \mathbb{C} : |z - i| + |z + i| = a\} \text{ dla } a = 1, 2, 3; \\ (e) \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |\operatorname{Re} z| < 2\}; \\ (f) \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re}(iz) < 1\}; \\ (g) \{z \in \mathbb{C} : |z| = \operatorname{Im} z + 1\}; \\ (h) \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z^2) = 1\}. \end{array}$$

8. Niech $z, w \in \mathbb{C}$. Udowodnij tożsamości

$$\begin{array}{l} (a) |z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2), \\ (b) |1 + z\bar{w}|^2 + |z - w|^2 = (1 + |z|^2)(1 + |w|^2), \\ (c) |1 - z\bar{w}|^2 - |z - w|^2 = (1 - |z|^2)(1 - |w|^2). \end{array}$$

Podaj interpretację geometryczną pierwszej tożsamości.

9. Niech $x, y, z \in \mathbb{C}$. Udowodnij, że

$$\begin{array}{l} (i) |x + y|^2 + |y + z|^2 + |z + x|^2 = |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 + |x + y + z|^2; \\ (ii) |x + y| + |y + z| + |z + x| \leq |x| + |y| + |z| + |x + y + z|. \end{array}$$

10. Zapisz liczby zespolone w postaci trygonometrycznej: (a) i , (b) $2 + 2i$, (c) $-1 + \sqrt{3}i$,

$$(d) \frac{3 + 2i}{-2 + 3i}, \quad (e) (\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1)i, \quad (f) 2 + \sqrt{3} + i.$$

11. Niech $z = r \cdot \operatorname{cis} \alpha$ i $n, m \in \mathbb{Z}$. Wyznacz postać trygonometryczną liczby $z^m \cdot \bar{z}^n$.

12. Wyznacz postać trygonometryczną liczb: (a) $\sin \alpha + i \cos \alpha$, (b) $1 + itg \alpha$,
(c) $1 + \cos \alpha + i \sin \alpha$, dla $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, (d) $\frac{1 + itg \alpha}{1 - itg \alpha}$.

13. Znajdź postać algebraiczną liczb (dla $n \in \mathbb{Z}$): (a) $(1 + i)^{2022}$, (b) $(1 + i\sqrt{3})^{1000}$,
(c) $\left(\frac{1 + i}{1 + i\sqrt{3}}\right)^{-100}$, (d) $\left(\frac{9 + 5i}{7 - 2i}\right)^8$, (e) $\frac{(\sqrt{3} + 3i)^{40}}{(\sqrt{3} + i)^{20}}$.

14. Wyraż $\cos(5x)$ i $\sin(5x)$ poprzez $\cos x$ i $\sin x$ oraz $tg(5x)$ przez $tg x$

15. Wyznacz w postaci algebraicznej pierwiastki zespolone (a) stopnia 3 z liczb $1, i, -1$, (b) stopnia 4 z liczb i i -1 .

16. Oblicz sumę i iloczyn wszystkich pierwiastków z jedności stopnia n .

17. Rozwiąż równania

$$\begin{array}{l} (a) 81(z + i)^4 = |z|^8, \\ (b) (z + 2)^6 = (z - 2)^6, \\ (c) (z + i)(\bar{z} - i)^2(iz - 1)^3 = 64 \end{array}$$

18. Wykaż, że liczba $\xi = (2 + i)/(2 - i)$ nie jest pierwiastkiem z jedności jakiegokolwiek stopnia, mimo że $|\xi| = 1$.

Liczby zespolone II

1. Rozwiąż równania

(a) $z^2 - 4z - 5 = 0$

(b) $z^2 - (1 + i)z + 6 + 3i = 0$

(c) $z^2 + (2i - 7)z + 13 - i = 0$

2. Oblicz $\cos \frac{2\pi}{5}$ oraz $\sin \frac{2\pi}{5}$.

3. Niech $z = \operatorname{cis} \theta$. Pokaż, że $\cos(n\theta) = \frac{1}{2} \left(z^n + \frac{1}{z^n} \right)$ oraz $\sin(n\theta) = \frac{1}{2i} \left(z^n - \frac{1}{z^n} \right)$.

4. Oblicz $\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11}$.

5. Niech $x \in \mathbb{R}$. Znajdź wzory dla sum

$$\sum_{k=0}^n \cos nx, \quad \sum_{k=1}^n \sin nx.$$

6. Dane są liczby zespolone u, v, w takie, że $u + v + w = 0$ i $|u| = |v| = |w|$. Udowodnij, że $u^2 + v^2 + w^2 = 0$.

7. Załóżmy, że $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 0$. Udowodnij, że

(a) $\cos(2\alpha) + \cos(2\beta) + \cos(2\gamma) = \sin(2\alpha) + \sin(2\beta) + \sin(2\gamma) = 0$,

(b) $3 \cos(\alpha + \beta + \gamma) = \cos(3\alpha) + \cos(3\beta) + \cos(3\gamma)$,

(c) $3 \sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin(3\alpha) + \sin(3\beta) + \sin(3\gamma)$.

8. Niech $x, y, z \in \mathbb{C}$, $|x| = |y| = |z| = a > 0$ oraz $x + y + z \neq 0$. Udowodnij, że

$$\left| \frac{xy + yz + zx}{x + y + z} \right| = a.$$

9. Niech $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$ i $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ oznaczają wszystkie zespolone pierwiastki z jedności stopnia n . Pokaż, że dla dowolnej liczby $z \in \mathbb{C}$ zachodzi równość

$$z = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Re}(\varepsilon_k \bar{z}) \cdot \varepsilon_k.$$

10. Liczba zespolona $z \neq 0$ spełnia równość

$$\left(z + \frac{1}{z} \right) \left(z + \frac{1}{z} + 1 \right) = 1.$$

Dla danej liczby naturalnej $n > 1$ znajdź wartość wyrażenia

$$\left(z^n + \frac{1}{z^n} \right) \left(z^n + \frac{1}{z^n} + 1 \right).$$

11. Niech $z \in \mathbb{C}$. Dla jakich liczb całkowitych n liczba $(z + i\bar{z})^n$ jest rzeczywista?

12. Rozstrzygnij, dla jakich liczb całkowitych n istnieje liczba rzeczywista a taka, że

$$|a - (1 + i)^n| = a.$$

13. Dana jest liczba naturalna $n \geq 3$, $\varepsilon \neq 1$ jest pierwiastkiem z jedności stopnia n . Udowodnij, że

$$|1 - \varepsilon| > \frac{2}{n-1}.$$

14. Dane są liczby zespolone $z_1, z_2, \dots, z_n$ takie, że $|z_1| = |z_2| = \dots = |z_n| > 0$. Udowodnij, że

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{z_j}{z_k} \right) = 0$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sum_{k=1}^n z_k = 0.$$

15. Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz z jest liczbą zespoloną o module 1. Udowodnij, że

$$n|1 + z| + |1 + z^2| + |1 + z^3| + \dots + |1 + z^{2n}| + |1 + z^{2n+1}| \geq 2n.$$

16. Niech $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{C}$. Stosując zasadę indukcji (lub innym sposobem) udowodnij *tożsamość Lagrange'a*:

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^2 \right) - \left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right|^2 = \sum_{1 \leq j < k \leq n} |x_j \bar{y}_k - x_k \bar{y}_j|^2.$$

Następnie udowodnij *nierówność Cauchy'ego - Schwarz*:

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^2 \right) \geq \left| \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k \right|^2.$$

Algebra liniowa

Definicja. Liczbę $ad - bc$ nazywamy *wyznacznikiem* macierzy kwadratowej $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, i zapisujemy $\det A$.

Stw. 1. Wektory $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$ na płaszczyźnie są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = 0$.

Tw. 2. (Wzory Cramera) Układ 2 równań liniowych z 2 niewiadomymi

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \quad (1)$$

ma jednoznaczne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq 0$. Wówczas

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} e & b \\ f & d \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} = \frac{ed - bf}{ad - bc}, \quad y = \frac{\det \begin{bmatrix} a & e \\ c & f \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} = \frac{af - ce}{ad - bc}.$$

Definicja. Wyznacznikiem macierzy 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3], \quad \vec{a}_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \end{bmatrix}$$

nazywamy liczbę

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Stw. 3. (Własności wyznacznika) Niech $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}, \vec{b}$ to wektory w przestrzeni, t_1, t_2, t_3 to liczby. Wówczas

- (i) $\det[t_1\vec{a}_1, t_2\vec{a}_2, t_3\vec{a}_3] = t_1t_2t_3 \cdot \det[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$,
- (ii) $\det[\vec{a}_1 + \vec{b}, \vec{a}_2, \vec{a}_3] = \det[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3] + \det[\vec{b}, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$ (i analogicznie dla pozostałych kolumn macierzy)
- (iii) $\det[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{0}] = \det[\vec{a}_1, \vec{0}, \vec{a}_3] = \det[\vec{0}, \vec{a}_2, \vec{a}_3] = 0$,
- (iv) $\det[\vec{a}, \vec{a}, \vec{b}] = \det[\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}] = \det[\vec{b}, \vec{a}, \vec{a}] = 0$.

Stw. 4. Wektory $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ w przestrzeni są współpłaszczyznowe wtw. gdy $\det[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3] = 0$.

Tw. 5. (Wzory Cramera). Układ 3 równań z 3 niewiadomymi

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

ma jednoznaczne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A \neq 0$ i wówczas

$$x = \frac{\det[\vec{b}, \vec{a}_2, \vec{a}_3]}{\det A}, \quad y = \frac{\det[\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{a}_3]}{\det A}, \quad z = \frac{\det[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}]}{\det A}.$$

1. Określ ilość rozwiązań układu równań w zależności od wartości parametrów a i b :

$$(a) \begin{cases} x - y = a \\ bx - 2y = 12 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} ax + 2y = b + 4 \\ 2x + (a + 3)y = 10 \end{cases}$$

2. Boki trójkąta zawierają się w prostych $4x + 3y - 21 = 0$, $x + 2y - 4 = 0$, $3x + y - 7 = 0$.

- (a) Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta.
- (b) Napisz równania prostych zawierających środkowe trójkąta.
- (c) Napisz równania prostych symetralnych boków trójkąta i wyznacz środek okręgu opisanego na tym trójkącie.

3. Wykaż, że układ równań ma jednoznaczne rozwiązanie i znajdź y :

$$(a) \begin{cases} 2y + z = 0 \\ x + 4y + z = 1 \\ 5x + 3y + 2z = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ 3x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

4. Znajdź taki trójmian kwadratowy f , że $f(1) = 8$, $f(-1) = 2$, $f(2) = 14$.

5. Wyznacz w zależności od $a \in \mathbb{R}$ wszystkie rozwiązania układu równań

$$(a) \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}, \quad (b) \begin{cases} x + ay - 3z = 1 \\ x + 10y - z = a \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

6. Korzystając z twierdzeń na tej kartce udowodnij, że na każdym czworościanie można opisać sferę.

Wielomiany I

Niech $\mathbb{K}$ oznacza zbiór $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. W każdym twierdzeniu lub zadaniu $\mathbb{K}$ zawsze oznacza ten sam zbiór.

Definicja. Wielomianem stopnia k o współczynnikach $a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$, gdzie $a_k \neq 0$, nazywamy funkcję $w : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (lub $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jeśli $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}$)

$$w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k.$$

Stopień wielomianu w oznaczamy $\deg w$. Liczbę a_k nazywamy *współczynnikiem wiodącym* wielomianu w . Jeżeli $a_k = 1$, to mówimy, że w jest wielomianem *unormowanym* lub *monicznym*. Stopień wielomianu zerowego $w_0(x) = 0$ jest równy $-\infty$.

Każdą liczbę $\alpha \in \mathbb{C}$ taką, że $w(\alpha) = 0$ nazywamy *pierwiastkiem* lub *miejscem zerowym* lub *zerem* wielomianu w .

Zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach zespolonych oznaczamy $\mathbb{C}[x]$. Analogicznie definiujemy zbiory $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ i $\mathbb{Z}[x]$. Każdy z tych zbiorów jest zamknięty ze względu na operacje dodawania, odejmowania, mnożenia i składania funkcji.

Lemat. Niech $w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{k-1}x^{k-1} + a_kx^k$, $a_j \in \mathbb{C}$, będzie wielomianem stopnia $k \geq 1$. Wówczas istnieje liczba rzeczywista M taka, że

$$|a_kx^k| > |w(x) - a_kx^k|, \quad \text{gdy } |x| > M.$$

Tw. (Pierwsze twierdzenie o równości wielomianów). Załóżmy, że wielomiany

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k \quad \text{ i } \quad g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$$

gdzie $a_j, b_j \in \mathbb{C}$ i $a_k, b_n \neq 0$, spełniają dla każdego $x \in \mathbb{C}$ równość $f(x) = g(x)$. Wówczas $k = n$ i $a_j = b_j$ dla $j = 0, 1, \dots, k$.

1. Liczba zespolona x_0 jest pierwiastkiem wielomianu $P \in \mathbb{R}[x]$. Wykaż, że liczba $\overline{x_0}$ też jest pierwiastkiem tego wielomianu.

2. Udowodnij, że dla każdego wielomianu $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ istnieje wielomian $g \in \mathbb{K}[x]$ taki, że $f(x) = g(x+1) - g(x)$ dla każdego x .

3. Niech $a, b \in \mathbb{R}$. Wyznacz pierwiastki zespolone wielomianu

$$p(x) = x^3 - 3abx + a^3 + b^3.$$

Jak za pomocą uzyskanych wzorów można otrzymać pierwiastki dowolnego wielomianu stopnia 3?

4. Załóżmy, że f i g są wielomianami. Udowodnij, że

(i) funkcja $f + g$ jest wielomianem i $\deg(f + g) \leq \max(\deg f, \deg g)$, oraz jeśli $\deg f > \deg g$, to $\deg(f + g) = \deg f$;

(ii) funkcja $f \cdot g$ jest wielomianem i $\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$;

(iii) funkcja $f \circ g$ jest wielomianem i $\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g$.

5. Wyznacz wszystkie wielomiany $p \in \mathbb{R}[x]$ takie, że $p(x^2) = p(x)^2$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

6. Pokaż, że wielomian $w(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ jest

(i) funkcją nieparzystą wtedy tylko wtedy, $a_k = 0$ dla parzystych k ;

(ii) funkcją parzystą wtedy i tylko wtedy, gdy $a_k = 0$ dla nieparzystych k .

7. (a) Udowodnij, że wielomian stopnia nieparzystego o współczynnikach rzeczywistych jest funkcją (określoną na $\mathbb{R}$) nieograniczoną z dołu i z góry

(b) Udowodnij, że wielomian stopnia parzystego i dodatniego o współczynnikach rzeczywistych i dodatnim współczynniku wiodącym jest funkcją ograniczoną z dołu i nieograniczoną z góry.

8. Udowodnij, że funkcje (a) $\frac{x}{1+x^2}$, (b) $\sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$ nie są wielomianami.

9. Udowodnij, że wielomian $w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (gdzie $a \neq 0$) przyjmuje dla każdej liczby całkowitej x wartość całkowitą wtedy i tylko wtedy, gdy liczby $6a$, $2b$, $a + b + c$ oraz d są całkowite.

10. Udowodnij, że wielomian $w(x) = x^3 - 2x$ nie jest różnowartościowy na zbiorze liczb rzeczywistych i jest różnowartościowy na zbiorze liczb wymiernych.

11. Wielomian P stopnia $n > 1$ ma współczynniki całkowite, $x, y \in \mathbb{Z}$ i $P(x) \neq P(y)$. Udowodnij, że $|P(x) - P(y)| \geq |x - y|$.

12. Niech $f \in \mathbb{Z}[x]$. Udowodnij, że dla dowolnych $a, b \in \mathbb{Z}$ liczba $f(a + \sqrt{b}) + f(a - \sqrt{b})$ jest całkowita.

13. Niech $n > 1$ i $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że wielomian

$$w(x) = x^{2n} - x^{2n-1} + x^{2n-2} - x^{2n-3} + \dots + x^2 - x + \frac{n}{4}$$

nie ma pierwiastków rzeczywistych.

Wielomiany II

Tw. 1. (o dzieleniu wielomianów) Dla każdej pary wielomianów $f(x)$ i $h(x)$, gdzie $\deg h \geq 0$, istnieje dokładnie jedna para wielomianów $q(x)$ i $r(x)$ taka, że

$$f = h \cdot q + r, \quad \text{gdzie } \deg r < \deg h.$$

Mówimy wówczas, że r jest *resztą z dzielenia* wielomianu f przez wielomian h . Jeżeli $r = 0$ (czyli $f = h \cdot q$), to mówimy, że h jest *dzielnikiem* f lub f jest *podzielny* przez h .

Tw. 2. (Bézouta) Reszta z dzielenia wielomianu f przez dwumian $x - c$ jest równa $f(c)$, czyli $f(x) = (x - c)q(x) + f(c)$ dla pewnego wielomianu q takiego, że $\deg q = \deg f - 1$.

Wniosek. Jeżeli różne liczby $c_1, c_2, \dots, c_k$ są pierwiastkami wielomianu f , to f jest podzielny przez wielomian $(x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_k)$.

Definicja. Mówimy, że liczba c jest pierwiastkiem wielomianu f krotności k , jeżeli $f(x)$ jest podzielny przez dwumian $(x - c)^k$ i nie jest podzielny przez $(x - c)^{k+1}$.

Schemat Hornera. Dany jest wielomian $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ($a_n \neq 0$) i liczba c . Współczynniki wielomianu $g(x) = b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$ takiego, że $f(x) = (x - c)g(x) + f(c)$ i liczbę $f(c)$ można sprawnie wyznaczyć za pomocą algorytmu zwanego *schematem Hornera*:

	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_1	a_0
c	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + cb_{n-1}$	$\dots$	$b_0 = a_1 + cb_1$	$f(c) = a_0 + cb_0$

Algorytm dzielenia wielomianów z resztą: Dla danych wielomianów w i q , gdzie $\deg w \geq \deg q$, szukamy wielomianów v i r takich, że $w = p \cdot v + r$ i $\deg(r) < \deg(q)$:

Niech $w_0(x) = w(x)$, $v_0(x) = 0$.

Jeżeli mamy już wyznaczone wielomiany w_k i v_k , to v_{k+1} otrzymujemy dodając do v_k iloraz najwyższych stopniem wyrazów wielomianów w_k i p : $v_{k+1}(x) = v_k(x) + c_k x^{j_k}$. Następnie wyznaczamy $w_{k+1}(x) = w_k(x) - c_k x^{j_k} \cdot p(x)$. Wówczas $\deg(w_{k+1}) < \deg(w_k)$.

Powtarzamy tak długo, aż $\deg(w_k) < \deg(q)$. Wtedy $v = v_k$ i $r = w_k$.

Tw. 3. (O interpolacji wielomianowej) Niech $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ i $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$, $y_0, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{C}$. Wówczas istnieje dokładnie jeden wielomian p stopnia nie większego od n taki, że $p(x_j) = y_j$ dla $j = 0, 1, \dots, n$.

Wniosek. (Drugie tw. o równości wielomianów) Jeżeli wielomiany p, q stopnia nie większego niż n przyjmują te same wartości dla $n + 1$ różnych argumentów, to $p = q$.

- Dla jakich wartości a, b wielomian $x^3 + ax^2 + bx - 6$ jest podzielny przez (a) $x + 1$, (b) $x^2 - 3x + 2$?
- Wielomian f daje resztę -1 przy dzieleniu przez $x - 1$, resztę 2 przy dzieleniu przez $x - 2$ i resztę 11 przy dzieleniu przez $x - 3$. Wyznacz resztę z dzielenia f przez $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$.
- Stosując schemat Hornera oblicz iloraz i resztę z dzielenia wielomianu
 - $f(x) = 3x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 1$ przez $x - 1$,
 - $g(x) = 4x^5 + 3x^3 - 2x + 1$ przez $x + 2$,
 - $h(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{2}{3}x - 2$ przez $x + \frac{1}{3}$.
- Stosując schemat Hornera zapisz wielomiany (a) $x^5 + x^3 + x$, (b) $x^4 - 2x^3 + 3x + 5$ jako sumę potęg dwumianu $x - 1$.
- Wykonaj dzielenie wielomianu z resztą:
 - $x^3 + 3x^2 - 2x - 1$ przez $x^2 + 2x$,
 - $x^6 + 1$ przez $x^2 + x - 2$
 - $3x^7 - x^6 + 2x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 4x - 2$ przez $x^2 + 1$
 - x^8 przez $x^4 - x^3 - x^2 - x + 1$
- Dla jakich wartości $a, b \in \mathbb{R}$ wielomian $ax^4 + bx^3 + 1$ jest podzielny przez $(x - 1)^2$?
- Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że wielomian $nx^{n+1} - (n + 1)x^n + 1$ jest podzielny przez $(x - 1)^2$.
- Dla jakich $n \in \mathbb{N}$ wielomian $x^2 + x + 1$ dzieli wielomian (a) $(x - 1)^n - x^n - 1$, (b) $(x + 1)^n + x^n + 1$?
- Niech $f(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + x + 1$. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $f(x^n)$ przez wielomian $f(x)$.
- Liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu w . Pokaż, że wielomian $v(x) = w(x^n)$ jest podzielny przez wielomian $x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$.
- Udowodnij, że nie istnieje wielomian p taki, że $p(x) = \sin x$ dla każdego $x \in [0, \pi]$.
- Niech p będzie wielomianem stopnia n takim, że $p(k) = \frac{k}{k+1}$ dla $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Oblicz $p(n+1)$.
- Wykaż, że liczby 1 i -1 to jedyne rzeczywiste pierwiastki wielomianu

$$f(x) = x^7 + x^6 - x^5 - x^4 + x^3 + x^2 - x - 1.$$
- Udowodnij, że wielomian $P(x) = x^{2n} - 2x^{2n-1} + 3x^{2n-2} - \dots - 2nx + (2n + 1)$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.

- Nie wykonując dzielenia wielomianów, wyznacz resztę z dzielenia wielomianu
 - $x^4 + x^2 - 6$ przez $x^2 - 2x - 3$,
 - $2x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x - 1$ przez $x^2 + 1$.

Wielomiany III

Mówimy, że liczba x_0 jest k -krotnym pierwiastkiem wielomianu $P(x)$ stopnia n , jeżeli istnieje wielomian $Q(x)$ stopnia $n - k$ taki, że $P(x) = (x - x_0)^k Q(x)$ i $Q(x_0) \neq 0$.

Zasadnicze twierdzenie algebry. Każdy wielomian o współczynnikach zespolonych dodatniego stopnia ma pierwiastek zespolony.

Wniosek 1. Każdy wielomian $p \in \mathbb{C}[z]$, $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ stopnia $n > 1$, ma dokładnie n pierwiastków zespolonych $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ (niekoniecznie różnych) i $p(z) = a_n(z - z_0)(z - z_1) \dots (z - z_{n-1})$.

Wniosek 2. Każdy wielomian z $\mathbb{R}[x]$ dodatniego stopnia jest iloczynem wielomianów z $\mathbb{R}[x]$ stopnia 1 i wielomianów z $\mathbb{R}[x]$ stopnia 2 nie mających pierwiastków rzeczywistych.

Wniosek 3. Każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych nieparzystego stopnia ma pierwiastek rzeczywisty.

Twierdzenie (Wzory Viete'a). Liczby $x_1, x_2, \dots, x_n$ są wszystkimi zespolonymi pierwiastkami wielomianu $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, gdzie $a_i \in \mathbb{C}$ i $a_n \neq 0$, wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są równości

$$\sum_{i=1}^n x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}, \quad \dots, \\ \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}, \quad \dots, \quad x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Uwaga: W powyższym twierdzeniu nie zakładamy, że pierwiastki $x_1, x_2, \dots, x_n$ są różne.

1. Wielomian $w(x) = x^3 + px + q$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2, x_3 , przy czym $x_1 = x_2$ i $x_3 = x_1 - 6$. Wyznacz p i q .
2. Niech $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Oblicz sumę, sumę kwadratów i iloczyn pierwiastków wielomianu $x^n - (x - 1)^n$.
3. Liczby x_1, x_2, x_3 są pierwiastkami wielomianu $x^3 + 6x^2 + 11x - 6$. Znajdź wielomian stopnia 3, którego pierwiastkami są liczby (a) $x_1 x_2, x_2 x_3, x_3 x_1$, (b) $x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1$.
4. Znajdź pierwiastki wielomianu $x^4 - 10x^3 + 32x^2 - 34x + 7$, wiedząc, że suma pewnych dwóch jego pierwiastków jest równa 4.
5. Wielomian $p(x) = x^5 - 10x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 32$ ma pięć pierwiastków dodatnich. Wyznacz współczynniki a, b, c .

6. Wielomian $w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) ma trzy pierwiastki rzeczywiste. Udowodnij, że $b^2 \geq ac$ i $c^2 \geq bd$. Czy jest prawdziwe twierdzenie odwrotne?
7. Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają nierówności $a + b + c > 0$, $ab + bc + ca > 0$ i $abc > 0$. Udowodnij, że $a > 0$, $b > 0$ i $c > 0$.
8. Liczby x, y, z, u, v, w spełniają warunki

$$x + y + z = u + v + w, \quad xyz = uvw, \quad 0 < u \leq x \leq y \leq z \leq w, \quad u \leq v \leq w.$$

Udowodnij, że $u = x, v = y, w = z$.

9. Liczby dodatnie x, y, z spełniają warunki $xyz > 1$ i $x + y + z < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Udowodnij, że dokładnie jedna z liczb x, y, z jest mniejsza od 1.
10. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 20 \end{cases}$$

11. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $n \geq 3$, $a_0, a_1, \dots, a_{n-3} \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że nie wszystkie pierwiastki wielomianu $P(x) = x^n + 2nx^{n-1} + 2n^2x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \dots + a_1x + a_0$ są liczbami rzeczywistymi.
12. Wielomian $ax^3 + bx^2 + cx + d$ współczynniki całkowite i trzy pierwiastki rzeczywiste. Liczba ad jest nieparzysta, a liczba bc jest parzysta. Udowodnij, że pewien pierwiastek tego wielomianu jest liczbą niewymierną.
13. Wszystkie współczynniki wielomianu $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + 1$ są liczbami nieujemnymi i wielomian P ma n pierwiastków rzeczywistych. Udowodnij, że $P(2) \geq 3^n$.
14. Liczby zespolone $x_1, x_2, \dots, x_n$ to pierwiastki wielomianu $x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1$. Udowodnij, że

$$\frac{1}{1 - x_1} + \frac{1}{1 - x_2} + \dots + \frac{1}{1 - x_n} = \frac{n}{2}.$$

15. Udowodnij, że suma pewnych dwóch pierwiastków zespolonych wielomianu $x^4 - 12x - 5$ wynosi 2.

Wielomiany IV

Niech $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, gdzie $a_n \neq 0$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych.

I twierdzenie o pierwiastkach wymiernych. Jeżeli liczba wymierna $\frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in \mathbb{Z}$ są względnie pierwsze, jest pierwiastkiem wielomianu f , to $p \mid a_0$ oraz $q \mid a_n$.

Wniosek. Każdy wymierny pierwiastek unormowanego wielomianu o współczynnikach całkowitych jest liczbą całkowitą.

II twierdzenie o pierwiastkach wymiernych. Jeżeli liczba wymierna $\frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in \mathbb{Z}$ są względnie pierwsze, jest pierwiastkiem wielomianu f i b jest liczbą całkowitą taką, że $f(b) \neq 0$, to $p - bq \mid f(b)$.

Definicja. Mówimy, że wielomian $p \in \mathbb{K}[x]$ (gdzie $\mathbb{K} = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) jest rozkładalny w $\mathbb{K}[x]$ (nad $\mathbb{K}$), jeżeli istnieją wielomiany $q, r \in \mathbb{K}[x]$ dodatnich stopni takie, że $p = q \cdot r$.

Kryterium Eisensteina nierozkładalności wielomianów w $\mathbb{Z}[x]$. Dany jest wielomian $f \in \mathbb{Z}[x]$, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ i $a_n \neq 0$. Załóżmy, że istnieje liczba pierwsza p taka, że

$$p \nmid a_n, \quad p \mid a_k \text{ dla } k = 0, 1, \dots, n-1, \quad \text{oraz} \quad p^2 \nmid a_0.$$

Wówczas wielomian f nie jest rozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$.

1. Wartości $w(0)$ i $w(1)$ wielomianu w stopnia 3 o współczynnikach całkowitych są nieparzyste. Udowodnij, że w nie ma pierwiastków całkowitych.
2. Zbadaj, czy istnieje wielomian w o współczynnikach całkowitych oraz liczba naturalna k takie, że $w(k) = k + 1$, $w(k + 1) = k + 2$, $w(k + 2) = k$.
3. Czy istnieje wielomian w stopnia 5 o współczynnikach całkowitych taki, że $w(5) = 2$ i $w(-5) = 3$?
4. Wyznacz wszystkie pierwiastki wymierne wielomianów:
 - (a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$,
 - (b) $x^4 + 4x^3 - 25x^2 - 16x + 84$,
 - (c) $11x^4 + 9x^3 - 35x^2 - 27x + 6$,
 - (d) $15x^4 - 19x^3 + 16x^2 - x - 3$,
 - (e) $18x^6 + 27x^5 - 5x^4 - 18x^2 - 27x + 5$,
 - (f) $9x^4 - 48x^3 + 10x^2 + 24x + 5$,
 - (g) $x^5 - 2x^4 - 13x^3 + 26x^2 + 36x - 72$.

5. Udowodnij, że liczby $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ i $\sqrt[3]{3} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ są niewymierne.

6. Wielomian o współczynnikach całkowitych przyjmuje wartości nieparzyste dla dwóch kolejnych liczb całkowitych. Udowodnij, że f nie ma pierwiastków całkowitych.
7. Wielomian o współczynnikach całkowitych przyjmuje wartość 1 dla trzech różnych liczb całkowitych. Udowodnij, że nie ma on pierwiastków całkowitych.
8. Wielomian $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, ma współczynniki całkowite. Załóżmy, że liczby a_n , a_0 i $f(1)$ są nieparzyste. Udowodnij, że f nie ma pierwiastków wymiernych.
9. Liczby 1 i 2 są pierwiastkami wielomianu f o współczynnikach całkowitych. Udowodnij, że pewien współczynnik wielomianu f jest mniejszy od -1.
10. Niech $k, p \in \mathbb{N}$ i wielomian $f(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ma współczynniki całkowite. Udowodnij, że jeżeli $p + 1$ nie dzieli żadnej z liczb $f(k), f(k + 1), \dots, f(k + p)$, to wielomian f nie posiada pierwiastków wymiernych.
11. Dane są różne liczby całkowite a i b . Pokaż, że wielomian $(x - a)^2(x - b)^2 + 1$ nie jest iloczynem dwóch wielomianów o współczynnikach całkowitych dodatniego stopnia.
12. Liczby całkowite $a_1, a_2, \dots, a_n$ są różne. Pokaż, że wielomian

$$(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) - 1$$

nie jest rozkładalny w nad $\mathbb{Z}$.

13. Rozłóż wielomiany na czynniki w $\mathbb{Z}[x]$:

- | | |
|---|--|
| (a) $(x + 1)^3 + (x - 1)^3$, | (k) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 9x - 15$, |
| (b) $x^6 + 1$, | (l) $x^5 + x^4 + x^3 - 1$ |
| (c) $x^9 + x^4 - x - 1$, | (m) $x^6 + 2x^4 + 2x^2 + 1$ |
| (d) $x^5 + 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5x + 15$, | (n) $x^8 + x^4 + 1$, |
| (e) $x^4 + 4$, | (o) $x^{10} + x^5 - 2$, |
| (f) $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$, | (p) $x^{10} + x^5 + 1$, |
| (g) $8x^3 - 5x^2 - 24x + 15$, | (q) $(x^2 + x + 1)^2 + 3x(x^2 + x + 1) + 2x^2$, |
| (h) $2x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 2$ | (r) $(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^2 - x^5$ |
| (i) $x^5 + x^3 - x^2 - 1$, | (s) $x^9 - 6x^4 + x^3 + 8$ |
| (j) $x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 6x - 12$, | |

14. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ liczba $n^{12} + 64$ jest iloczynem czterech różnych liczb naturalnych.
15. Udowodnij, że wielomian $2x^{17} - 18x^{12} + 24x^9 + 243x^6 - 30x^3 - 6$ jest nierozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$.
16. Udowodnij, że wielomian $x^6 + x^3 + 1$ nie jest rozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$.
17. Niech $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ i $P(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$. Pokaż, że wielomian P jest rozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$ wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą złożoną.

Powtórzenie

1. Rozstrzygnij, dla jakich wartości parametru a układ równań

$$\begin{cases} a^2x - 9y & = & 0 \\ (a+2)x & + & 2z = 10 \\ & 5y + (a-1)z & = -15 \end{cases}$$

- (a) nie ma rozwiązań,
(b) ma dokładnie jedno rozwiązanie,
(c) ma wiele rozwiązań.
2. Wyznacz współczynniki a i b wielomianu $w(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$, jeżeli dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $w(x-1) - w(x) = -3x^2 + 3x - 6$.
3. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $x^{2022} - 2021x^{1011} + x^2 - 5x + 2021$ przez $x^2 - 1$.
4. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje wielomian $w \in \mathbb{Z}[x]$ stopnia n taki, że $w(2) = 7$ i $w(5) = 13$.
5. Dla jakich wartości a, b wielomian $x^5 + x^4 + ax^3 + bx^2 + 5$ jest podzielny przez
(a) $(x+1)^2$, (b) $x^2 + 4$?
6. Zapisz wielomian $4x^6 - 3x^5 + x^4 - 2x^2 + 5$ jako wielomian zmiennej $t = x + 1$.
7. Dla jakich a, b wielomian $w(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 8x + 1$ jest kwadratem innego wielomianu?
8. Wyznacz wszystkie zespolone pierwiastki wielomianów:

- (a) $3x^3 + 10x^2 + 9x + 2$,
(b) $2x^3 + 5x^2 + 3x - 3$,
(c) $x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6$,
(d) $x^5 - x^4 - 3x^3 - 3x^2 - x + 1$.

9. Wyznacz rzeczywiste rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 + xyz = x^4 + y^4 + z^4 + 1 \end{cases}$$

10. Niech $n \geq 2$. Udowodnij, że wielomian

$$p(x) = \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \frac{x^2}{2!} + \frac{x}{1!} + 1$$

nie ma pierwiastków wymiennych.

11. Dla jakich wartości współczynnika $a \in \mathbb{R}$ pierwiastki zespolone x_1, x_2, x_3 wielomianu $x^3 + ax^2 - 3x - 19$ spełniają warunek $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3$?
12. Wielomian $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $a \neq 0$, ma współczynniki całkowite i $7 \mid f(n)$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$. Udowodnij, że każda z liczb a, b, c, d, e jest podzielna przez 7.
13. Udowodnij, że wielomian $ax^3 + bx^2 + cx + d$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $2 \nmid ad$ i $2 \mid bc$, nie może mieć trzech pierwiastków wymiennych.
14. Rozłóż wielomiany na czynniki o całkowitych współczynnikach:
- (a) $x^6 + x^4 + 2x^2 + 2$,
(b) $x^6 - 3x^4 + 8x^3 + 3x^2 - 1$,
(c) $x^{16} - x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1$,
(d) $x^8 + x^4 + 2x^2 + 6$,
(e) $x^9 + x^7 - x^5 - x^3 + 2x^2 + 2$.
15. Udowodnij, że wielomian $P(x) = x^7 + (x+3)^7 + (x+4)^7 + 6$ jest nierozkładalny nad $\mathbb{Z}$.
16. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że wielomian $x^{2^n} + 1$ jest nierozkładalny w $\mathbb{Z}[x]$.
17. Niech $a \in \mathbb{Z}$ i $5 \nmid a$. Udowodnij, że wielomian $P(x) = x^5 - x + a$ jest nierozkładalny nad $\mathbb{Z}$.

Zadania różne

1. Rozwiąż układy równań:

$$(a) \begin{cases} x - y = 6 \\ x^3 - y^3 = 126 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} xy + 24 = \frac{x^3}{y} \\ xy - 6 = \frac{y^3}{x} \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} (x - y)(y - 1) = 6 \\ (x + 2)(y + 2) = 24 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} 7x^3 + 11xy^2 = 6 \\ x^3 + x^2y + y^3 = 1 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} (x^2 + x + 1)(y^2 + y + 1) = 3 \\ (1 - x)(1 - y) = 6 \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} \frac{xy}{x + 2y} + \frac{x + 2y}{xy} = 2 \\ \frac{xy}{x - 2y} - 6\frac{x - 2y}{xy} = 1 \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17 \\ xy + x + y = 5 \end{cases}$$

$$(h) \begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

$$(i) \begin{cases} (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4) = 1 + y^7 \\ (1 + y)(1 + y^2)(1 + y^4) = 1 + x^7 \end{cases}$$

$$(j) \begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = \frac{9}{2} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$(k) \begin{cases} x^2 + y^2 = x + y \\ x^4 + y^4 = \frac{(x + y)^2}{2} \end{cases}$$

$$(l) \begin{cases} \frac{x + y}{xyz} = 3 \\ \frac{y + z}{xyz} = 4 \\ \frac{z + x}{xyz} = 5 \end{cases}$$

2. Uprość wyrażenia

$$(a) \left(\frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b} \right)^2, \text{ dla } a, b > 0, a \neq b.$$

$$(b) \frac{(a^2 - b^2)(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})}{\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{ab^3} - \sqrt[3]{a^3b} - \sqrt[3]{b^4}}, \text{ dla } |a| \neq |b|.$$

$$(c) \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt[6]{a}} \left(\frac{1}{\sqrt[6]{b^5}} - \frac{1}{\sqrt[3]{a}\sqrt[2]{b}} \right) \right)^3}, \text{ dla } a, b > 0.$$

$$(d) \sqrt[3]{(a^2 + 1)\sqrt{1 + \frac{1}{a^2}}} + \sqrt[3]{(a^2 - 1)\sqrt{1 - \frac{1}{a^2}}}, \text{ dla } a > 1.$$

$$(e) \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{a + \sqrt{a^2 - b^2}} - \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}} \right) \cdot \frac{b^2}{\sqrt{a^4 - a^2b^2}}.$$

3. Rozwiąż równania

$$(a) \sqrt{1 - |5 - x^2|} = 2$$

$$(b) \sqrt{4x + 8} - \sqrt{3x - 2} = 2$$

$$(c) \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} = 4$$

$$(d) \sqrt{1 + x^2} - \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} = \sqrt{|x^2 - 1|}$$

$$(e) \sqrt[3]{x + 45} - \sqrt[3]{x - 16} = 1,$$

$$(f) \sqrt{x^3 + x^2 - 1} + \sqrt{x^3 + x^2 + 2} = 3$$

$$(l) \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{x}{x + \sqrt{x}}}$$

$$(g) \sqrt{x + 2} + \sqrt{3x + 8} = \sqrt{2x + 6}$$

$$(h) \sqrt{x - 3} + \sqrt{7 - x} = \sqrt[4]{8(x - 4)(6 - x)}$$

$$(i) \frac{\sqrt{x^2 + x + 6} + \sqrt{x^2 - x - 4}}{\sqrt{x^2 + x + 6} - \sqrt{x^2 - x - 4}} = 5$$

$$(j) \frac{x\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x^2} - 1} - \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} = 12$$

$$(k) \sqrt{4 + x\sqrt{x^2 + 40}} = x + 2$$

4. Rozwiąż nierówności

$$(a) \frac{1}{x + 2} \leq \frac{3}{x - 3},$$

$$(b) \frac{1 + x^3}{x^2 - 4} < x,$$

$$(c) \frac{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}{(x + 1)(x + 2)(x + 3)} > 1,$$

$$(d) \left| \frac{x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1} \right| < 1,$$

$$(e) \frac{3}{|x + 3| - 1} \geq |x + 2|,$$

$$(f) x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 \geq 4 \left(x - \frac{1}{x} \right),$$

$$(g) (x - 2)\sqrt{x^2 + 6} \leq x^2 - 4,$$

$$(h) \sqrt{2x + 1} < \sqrt{x^3 - 4x^2 + x + 5},$$

$$(i) \frac{x^2 - 16}{\sqrt{35 - 2x - x^2}} \leq |x| + 4,$$

5. Udowodnij, że

$$(a) \left(x^4 + \frac{1}{x} \right) \left(x^3 + \frac{1}{x^2} \right) < \left(x^4 + \frac{1}{x^2} \right) \left(x^3 + \frac{1}{x} \right), \text{ dla } x > 1;$$

$$(b) \left(x + \frac{1}{x} \right)^6 - \left(x^3 + \frac{1}{x^3} \right)^2 \geq 6 \left(\left(x + \frac{1}{x} \right)^3 + \left(x^3 + \frac{1}{x^3} \right) \right), \text{ dla } x > 0.$$

6. Niech $a \in \mathbb{R}$. Rozwiąż równanie

$$\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + x}}}} = x.$$

7. Udowodnij, że dla dowolnych $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m > 1$, prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{\sqrt[n^2]{mn + 1}} + \frac{1}{\sqrt[m^2]{mn + 1}} > 1.$$

Granica ciągu I

Definicja granicy ciągu. Liczba g jest granicą ciągu liczbowego $(a_n)_n$, jeżeli dla każdej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna N taka, że dla wszystkich $n > N$ spełniona jest nierówność

$$|a_n - g| < \varepsilon.$$

Piszemy wówczas $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$, $a_n \xrightarrow{n} g$ lub po prostu $a_n \rightarrow g$.

Jeżeli liczba $g \in \mathbb{R}$ jest granicą ciągu $(a_n)_n$, to mówimy, że ciąg $(a_n)_n$ *jest zbieżny do g*. Ciąg, który nie jest zbieżny, nazywamy *ciągami rozbieżnym*.

Stw. 1 (jednoznaczność granicy). Ciąg liczbowy (a_n) ma nie więcej niż jedną granicę.

Stw. 2. Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, to

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = ca \text{ dla dowolnego } c \in \mathbb{R}, \quad (ii) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b.$$

Stw. 3. Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.

Tw. 4. (o trzech ciągach) Dane są trzy ciągi liczbowe $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ i $(c_n)_n$, przy czym $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g$ oraz istnieje liczba $N > 0$ taka, że dla każdego $n > N$ spełniona jest nierówność $a_n \leq b_n \leq c_n$. Wówczas ciąg $(b_n)_n$ jest zbieżny i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$.

Stw. 5. Ciągi $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ są zbieżne i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Wówczas

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab,$$

$$(ii) \text{ jeśli } b \neq 0, \text{ to } b_n \neq 0 \text{ dla dostatecznie dużych } n \text{ i } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Stw. 6. Niech $k \in \mathbb{N}$, ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$. Jeżeli $2 \mid k$ i $a_n \geq 0$ dla każdego n , lub $2 \nmid k$ to ciąg $(\sqrt[k]{a_n})_n$ jest zbieżny i $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{g}$.

$$1. \text{ Wykaż, korzystając z definicji granicy ciągu, że (a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{n^2 - 1} = 2,$$

$$(b) \text{ jeśli } |q| < 1, k \in \mathbb{N}, \text{ to } \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \text{ i } \lim_{n \rightarrow \infty} n^k q^n = 0.$$

$$2. \text{ Zbadaj zbieżność ciągu } a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

$$3. \text{ Wykaż, że dla każdego } n \in \mathbb{N} \text{ i } a > 1 \text{ prawdziwa jest nierówność } \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a-1}{n}.$$

Następnie udowodnij, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

$$4. \text{ Wykaż, że } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - g| = 0.$$

$$5. \text{ Załóżmy, że } a_n \rightarrow a. \text{ Wykaż, że } |a_n| \rightarrow |a|. \text{ Podaj przykład, że nie zachodzi implikacja w drugą stronę.}$$

6. Wykaż, że poniższe ciągi są rozbieżne:

$$(a) a_n = n,$$

$$(b) b_n = (-1)^n + \frac{1}{n},$$

$$(c) c_n = \frac{q^n}{n^k}, \text{ gdzie } |q| > 1, k \in \mathbb{N},$$

$$(d) a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k},$$

$$(e) b_n = \frac{n^n}{n!}.$$

7. Ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > a$. Wykaż, że istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $a_n > a$ dla $n > N$.

8. Ciągi $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ są zbieżne i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Wykaż, że istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $a_n > b_n$ dla $n > N$.

9. Ciągi $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ są zbieżne i istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że $a_n \leq b_n$ dla $n > N$. Wykaż, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Podaj przykład ciągów $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ takich, że $a_n < b_n$ dla wszystkich n oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

10. Załóżmy, że $a_n \rightarrow g$. Wykaż, że ciąg $b_n = \frac{\lfloor na_n \rfloor}{n}$ też jest zbieżny do g .

11. Wykaż, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

12. Ciąg $(a_n)_n$ jest ograniczony, a ciąg $(b_n)_n$ jest zbieżny do 0. Wykaż, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$.

13. Oblicz granice ciągów lub wykaż, że ciągi są rozbieżne:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-2}{2n+8},$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n-3)^2}{3n^2+7n-6},$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 3^{n+1} - 2 \cdot 2^{2n}}{5 \cdot 3^n - 4^{n+2}},$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2^n - 7 \cdot 3^n}{3^n + 2},$$

$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 7^n + n^7 5^n}{n^7 7^n + n^5 5^n},$$

$$(f) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 2n} \right),$$

$$(g) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n^2},$$

$$(h) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} \binom{n+k}{n}, k \in \mathbb{N},$$

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! + (n-1)!}{(n+1)! - (n-1)!},$$

$$(j) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + \sqrt{n}} - \sqrt{n^2 - \sqrt{n}}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}},$$

$$(k) \sin(\sqrt{n+1}) - \sin(\sqrt{n-1}),$$

$$(l) \frac{n}{n^2+1} \sin(n!).$$

$$(m) \sqrt[n]{3^n + 2^n},$$

$$(n) \sqrt[n]{3^n - 2^n},$$

$$(o) \sqrt[n]{n+3^n},$$

$$(p) \sqrt[n]{2n + \frac{(-1)^n}{n}},$$

$$(q) n^2 \sqrt[n]{n},$$

$$(r) n^{+2} \sqrt[n]{n-2}, n \geq 2,$$

$$(s) n^2 \sqrt[n]{5^n - 4},$$

$$(t) \sqrt[n]{5^{n-1} - 7 \cdot 2^{2n} - 100}$$

Granica ciągu II

Definicja. Ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_n$ jest *rozbieżny do $+\infty$ ($-\infty$)* wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{M>0} \exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{n>N} a_n > M \quad (a_n < -M).$$

Piszemy wówczas $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ lub $a_n \rightarrow +\infty$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ lub $a_n \rightarrow -\infty$).

Definicja. Mówimy, że ciąg $(a_n)_n$ ma granicę, jeżeli jest on zbieżny (wtedy ma granicę skończoną) lub rozbieżny do $\pm\infty$ (wtedy ma granicę nieskończoną).

Stw. Załóżmy, że $a_n \rightarrow +\infty$. Wówczas

- $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$,
- jeśli ciąg $(b_n)_n$ jest zbieżny lub ograniczony z dołu, to $a_n + b_n \rightarrow +\infty$;
- jeśli istnieje stała $c > 0$ taka, że $b_n > c$ dla prawie wszystkich n lub $b_n \rightarrow c$, to $a_n b_n \rightarrow +\infty$;
- jeśli istnieje stała $c < 0$ taka, że $b_n < c$ dla prawie wszystkich n lub $b_n \rightarrow c$, to $a_n b_n \rightarrow -\infty$;
- jeśli $b_n \rightarrow +\infty$, to $a_n + b_n \rightarrow +\infty$ i $a_n b_n \rightarrow +\infty$;

Stw. Jeśli $a_n \rightarrow 0$ i $a_n > 0$ dla prawie wszystkich n , to $\frac{1}{a_n} \rightarrow +\infty$.

Stw. Jeżeli $a_n \rightarrow +\infty$ i $b_n \geq a_n$ dla prawie wszystkich n , to $b_n \rightarrow +\infty$.

Wyrażenia nieoznaczone:

- $\infty - \infty$, np. $(n+1) - n$, $n^2 - n$, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;
- $0 \cdot \infty$, np. $\frac{1}{n} \cdot n$, $\frac{1}{2^n} \cdot n^4$, $\frac{1}{2^n} \cdot n!$,
- $\frac{0}{0}$, np. $\frac{(\frac{1}{2})^n}{(\frac{1}{3})^n}$, $\frac{\frac{1}{n}}{(\frac{1}{2})^n}$,
- $\frac{\infty}{\infty}$, np. $\frac{n}{n+1}$, $\frac{2^n}{n}$, $\frac{n}{2^n}$,
- 1^∞ , np. $(\sqrt[n]{2})^n$, $(\sqrt[n]{2})^{n^2}$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$,
- ∞^0 , np. $n^{1/n}$, $(2^n)^{1/n}$.

1. Udowodnij, że ciąg $(\sin n)_n$ nie ma granicy.

2. Dana jest liczba naturalna k oraz ciąg $(a_n)_{n=1}^\infty$ o wyrazach ze zbioru $\{0, 1, \dots, k\}$. Niech

$$b_n = \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n}, \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Założmy, że w ciągu (b_n) występuje nieskończenie wiele wyrazów całkowitych. Wykaż, że wszystkie wyrazy ciągu (b_n) są całkowite.

3. Oblicz granice ciągów lub wykaż, że nie istnieją:

- (a) $\frac{n^4 - 5n^3 + 17n^2 - 9n - 2}{12n^3 - 5n^2 + 10n - 7}$, (e) $n^3 \left(\sqrt{n^2 + \sqrt{n^4 + 1}} - n\sqrt{2} \right)$,
 (b) $\frac{2^{2n} - 3^n}{3^n - 2^n}$, (f) $\sqrt{n^4 - 3n} \left(\sqrt[3]{1 - n^3} + n \right)$,
 (c) $\frac{5^n + n^3 - 5}{n^4 + 2^n \cdot n}$, (g) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$,
 (d) $\frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$, (h) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$,

4. (a) Załóżmy, że $a_n \in \mathbb{R}$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$. Wykaż, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

(b) Załóżmy, że $a_n > 0$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$. Wykaż, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

5. Korzystając z poprzedniego zadania oblicz granicę ciągów

(a) $\frac{2^n}{n!}$, (b) $\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

6. Liczby całkowite a_n , b_n spełniają zależność $a_n + b_n \sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^n$. Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$.

7. Załóżmy, że $a_n \geq 0$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$. Wykaż, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

8. (a) Ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny do g . Wykaż, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = g.$$

(b) Ciąg $(a_n)_n$ ma wyrazy dodatnie i jest zbieżny do g . Wykaż, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = g.$$

9. Dany jest ciąg liczb dodatnich $(a_n)_{n=1}^\infty$ taki, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$. Wykaż, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = g$.

10. Korzystając z poprzedniego zadania oblicz granicę ciągów

(a) $\sqrt[2]{2 \cdot 5^n - 3^n + n^3 \sin n}$, (b) $\sqrt[n]{n!}$.

11. Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 1 + \sin^2 2 + \dots + \sin^2 n}{n}.$$

12. Niech p_n oznacza n -tą liczbę pierwszą. Wykaż, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_n} \right)^{-1} = +\infty.$$

Kresy zbiorów

Definicje. Niech $A \subset \mathbb{R}$.

• Zbiór A jest *ograniczony z góry* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $b \in \mathbb{R}$ taka, że dla każdego $a \in A$ zachodzi nierówność $a \leq b$. Każdą taką liczbę b nazywamy *ograniczeniem górnym* zbioru A .

• Liczba $b \in \mathbb{R}$ jest *kresem górnym* (*supremum*) zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:

- (i) b jest ograniczeniem górnym zbioru A ;
- (ii) jeżeli c jest ograniczeniem górnym zbioru A , to $b \leq c$.

Kres górny zbioru A oznaczamy $\sup A$.

Analogicznie definiujemy zbiór *ograniczony z dołu*, *ograniczenie dolne* i *kres dolny* (*infimum*) zbioru A , oznaczamy $\inf A$.

Jeżeli niepusty zbiór A nie jest ograniczony z góry, piszemy $\sup A = +\infty$, jeżeli A nie jest ograniczony z dołu, to piszemy $\inf A = -\infty$. Ponadto przyjmujemy, że $\inf \emptyset = +\infty$ i $\sup \emptyset = -\infty$.

Jeżeli $a = \sup A$ i $a \in A$, to mówimy, że a jest *elementem maksymalnym* zbioru A i stosujemy oznaczenie $a = \max A$. Podobnie definiujemy *element minimalny* $\min A$.

Stw. 1. Niech $A \subset \mathbb{R}$. Wówczas

(i) Liczba $b \in \mathbb{R}$ jest kresem górnym zbioru A

$$\iff b \text{ jest ograniczeniem górnym zbioru } A \text{ oraz } \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \ b - \varepsilon < a$$

$$\iff b \text{ jest ograniczeniem górnym zbioru } A \text{ oraz istnieje ciąg } a_n \in A \text{ zbieżny do } b.$$

(ii) Liczba $b \in \mathbb{R}$ jest kresem dolnym zbioru A

$$\iff b \text{ jest ograniczeniem dolnym zbioru } A \text{ oraz } \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \ a < b + \varepsilon$$

$$\iff b \text{ jest ograniczeniem dolnym zbioru } A \text{ oraz istnieje ciąg } a_n \in A \text{ zbieżny do } b.$$

Aksjomat ciągłości (Dedekinda). Każdy niepusty i ograniczony z góry zbiór $A \subset \mathbb{R}$ ma kres górny.

Stw. 2. Każdy niepusty i ograniczony z dołu zbiór $A \subset \mathbb{R}$ ma kres dolny.

Definicja. Zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ jest to najmniejszy podzbiór A zbioru $\mathbb{R}$ o własnościach

(i) $1 \in A$ oraz (ii) jeśli $a \in A$ to $a + 1 \in A$.

Stw. 3. Zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ jest nieograniczony z góry.

Stw. 4. (Zasada Archimedesesa). Dla każdej liczby rzeczywistej a istnieje liczba naturalna n taka, że $n > a$.

Tw. 5. (istnienie pierwiastków z liczb nieujemnych). Jeżeli $a \geq 0$ i $n \in \mathbb{N}$, to istnieje dokładnie jedna liczba $b \geq 0$ taka, że $b^n = a$.

Tw. 5. (o gęstości $\mathbb{Q}$ w $\mathbb{R}$). Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b , $a < b$, istnieje liczba $x \in \mathbb{Q}$ taka, że $a < x < b$.

Definicja. Jeżeli zbiory $A, B \subset \mathbb{R}$ są niepuste, $\lambda \in \mathbb{R}$, to przyjmujemy, że $\lambda \cdot A = \{\lambda a : a \in A\}$, $-A = (-1) \cdot A$, $A \pm B = \{a \pm b : a \in A, b \in B\}$, $A \cdot B = \{ab : a \in A, b \in B\}$.

1. Niech $A, B \subset \mathbb{R}$ i dla dowolnych $a \in A$ i $b \in B$ zachodzi $a \leq b$. Udowodnij, że $\sup A \leq \inf B$. Czy prawdziwe jest twierdzenie odwrotne?

2. Niech $A \subset \mathbb{R}$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, $b = \inf A$, $c = \sup A$. Wyznacz kresy zbioru $\lambda \cdot A$.

3. Zbiory $A, B \subset \mathbb{R}$ są niepuste i mają skończone kresy. Udowodnij równości:

$$(i) \sup(-A) = -\inf A, \quad (iii) \sup(A + B) = \sup A + \sup B,$$

$$(ii) \sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B), \quad (iv) \sup(A - B) = \sup A - \inf B,$$

$$(v) \sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B, \text{ jeśli } A, B \subset [0, +\infty).$$

4. Znajdź kresy zbiorów. Czy zbiory mają elementy maksymalne i minimalne?

$$(a) \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\};$$

$$(f) \left\{ \frac{1}{k} + \frac{1}{l} - \frac{1}{m} : k, l, m \in \mathbb{N} \right\};$$

$$(b) \left\{ \frac{n^2 + 2n - 3}{n + 1} : n \in \mathbb{N} \right\};$$

$$(g) \left\{ \frac{nm}{2n^2 + m^2} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$$

$$(c) \left\{ x - \frac{1}{x} : 1 \leq x \leq 2024 \right\};$$

$$(h) \{xyz : x + y + z = 6 \text{ i } 0 \leq x, y, z\}$$

$$(i) \{(1 - 4a)b^3 + a^2 : a, b \in (0, 1)\}$$

$$(d) \left\{ \frac{n - k}{n + k} : n, k \in \mathbb{N} \right\};$$

$$(j) \left\{ \frac{(n + m)^2}{2nm} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$$

$$(e) \left\{ \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| : m, n \in \mathbb{N}, n \neq m \right\};$$

$$(k) \left\{ \frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{\sqrt[n]{n}} : n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

5. Dany jest zbiór $E = \{1 + n^{-2} : n \in \mathbb{N}\}$. Wyznacz kresy zbioru $E + 2 \cdot E$.

6. Zbiór niepusty $A \subset \mathbb{R}$ ma własność, że dla każdego $A \in A$ istnieje element $b \in A$ taki, że $b \leq \frac{a}{2} + 1$. Udowodnij, że $\inf A \leq 2$.

7. Niech $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ i $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Udowodnij, że istnieje liczba wymierna q taka, że $a < qx < b$.

8. Niech A oznacza zbiór wszystkich liczb niewymiernych z przedziału $(0, 1)$. Wyznacz zbiór $A + A$.

9. Udowodnij, że istnieją ciągi liczb wymiernych $(a_n), (b_n)$ takie, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \sqrt{2} + b_n \sqrt{3}) = \sqrt{5}.$$

10. Wyznacz kres górny zbioru $\left\{ \frac{x(1 + \sqrt{y})}{x^2 + y^2} : 0 < x \leq y < 1 \right\}$.

11. Wyznacz kresy zbioru

$$\left\{ \frac{a_1}{a_2} + \frac{2a_2}{a_3} + \dots + \frac{(n-1)a_{n-1}}{a_n} + \frac{na_n}{a_1} : a_1, a_2, \dots, a_n > 0 \right\}.$$

Granica ciągu III

Tw. 1. Niech $(a_n)_n$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych, który jest

(i) niemalejący i ograniczony z góry

lub

(ii) nierosnący i ograniczony z dołu.

Wówczas ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny.

Lemat 1. Dla $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Lemat 2. Jeśli $n \in \mathbb{N}$, to

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < 3.$$

Tw. 2. (Stała Eulera) Ciąg $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący i ograniczony z góry, więc zbieżny. Jego granicę, czyli liczbę

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

nazywamy *stałą Eulera*.

Tw. 3. $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

Lemat 3. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje liczba $\theta_n \in (0, 1)$ taka, że $e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{\theta_n}{nn!}$.

Tw. 4. Liczba e jest niewymierna.

1. Wykaż zbieżność ciągów

$$(a) a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}, \quad (b) b_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}, \quad (c) c_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right), \quad .$$

2. Niech $x_1 > 0$ i $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$. Wykaż, że ciąg $(x_n)_n$ jest zbieżny i znajdź jego granicę.

3. Dany jest ciąg $(a_n)_n$ taki, że $a_1 > 0$ i

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Wykaż, że ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny i znajdź jego granicę.

4. Niech $a_1 > b_1 > 0$ i

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \frac{2}{a_n^{-1} + b_n^{-1}}, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Wykaż, że ciągi $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ są zbieżne i wyznacz ich granice.

5. Niech $a_1 > b_1 > 0$ i

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Wykaż, że ciągi $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ są zbieżne do tej samej granicy (zwanej *średnią arytmetyczno-geometryczną* liczb a_1, b_1).

6. Ciąg $(a_n)_n$ spełnia warunki $0 < a_n < 1$ i $a_n(1 - a_{n+1}) > \frac{1}{4}$ dla $n \geq 1$. Wykaż, że ciąg ten jest zbieżny i znajdź jego granicę.

7. Niech $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{2}$ i $a_{n+2} = \frac{1 + a_{n+1} + a_n^3}{3}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wykaż, że ciąg ten jest zbieżny i znajdź jego granicę.

8. Niech $b_1 = 1$, $b_2 = 2$ i $b_{n+2} = \sqrt{b_n} + \sqrt{b_{n+1}}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wykaż, że ciąg ten jest zbieżny i znajdź jego granicę.

9. Wykaż, że $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$

10. Oblicz granice

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n, \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}, \quad (d) \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{e} - 1).$$

11. Wykaż, że $\lim_{n \rightarrow \infty} (2\sqrt[n]{a} - 1)^n = a^2$ dla $a \geq 1$, oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2\sqrt[n]{n} - 1)^n}{n^2} = 1$.

12. Oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+1)!}$.

13. Pokaż, że jeśli $a_n \in \mathbb{Q}$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ lub $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

14. Niech $(\theta_n)_n$ to ciąg zdefiniowany w lemacie 3. Wykaż, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 1$.

15. Oblicz granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi en!)$.

16. Ciąg $(a_n)_n$ jest ograniczony z góry i $a_{n+1} - a_n > -\frac{1}{n^2}$ dla każdego n . Wykaż, że ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny.

Granica ciągu IV

Twierdzenie Bolzano - Weierstrassa. Z każdego ciągu ograniczonego liczb rzeczywistych można wybrać podciąg zbieżny.

Tw. (Warunek Cauchy'ego zbieżności ciągu) Ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{m, n > N} |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Twierdzenie Stolza. Ciągi liczb rzeczywistych $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ spełniają warunki:

(i) ciąg $(b_n)_n$ jest ściśle monotoniczny i $b_n \neq 0$ dla każdego n ,

(ii) istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = g$,

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \pm\infty$ lub $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Wówczas $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = g$.

1. Korzystając z warunku Cauchy'ego, zbadaj zbieżność ciągów:

$$(a) a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad (b) b_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{3^k}, \quad (c) c_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}, \quad (d) d_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)^2}.$$

2. Zbadaj zbieżność ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ zdefiniowanego następująco:

$$x_1 = 3, \quad x_{n+1} = \left(\frac{x_n - 1}{2} \right)^2 \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Jeżeli ciąg jest zbieżny, wyznacz jego granicę.

3. **Kryterium Leibniza zbieżności szeregów.** Dany jest nierosnący ciąg liczb dodatnich $(a_n)_n$ taki, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Wykaż, że ciąg $b_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k$ jest zbieżny.

4. Niech $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Wykaż, że istnieje bijekcja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taka, że ciąg

$$a_n = \sum_{k=1}^n x_{f(k)}$$

(a) jest rozbieżny,

(b) jest zbieżny do danej liczby rzeczywistej g .

5. Niech $(a_n)_n$ to ciąg liczb rzeczywistych. Załóżmy, że istnieje stała $\lambda \in (0, 1)$ taka, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \lambda |a_{n+1} - a_n|$. Wykaż, że ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny.

6. Niech $k \in \mathbb{N}$ i $k > 1$. Ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_n$ spełnia warunki

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0 \quad \text{ i } \quad \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{n, m > N} |a_{kn} - a_{km}| < \varepsilon.$$

Wykaż, że ciąg $(a_n)_n$ jest zbieżny.

Podaj przykłady, że z żadnego z tych warunków osobno nie wynika zbieżność ciągu.

7. Wykaż, że każdy ciąg zbieżny zawiera wyraz najmniejszy lub największy.

8. Wykaż, że z każdego ograniczonego ciągu liczb zespolonych można wybrać podciąg zbieżny.

9. Dany jest ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_n$ taki, że ciąg $b_n = \sum_{k=1}^n a_k$ jest zbieżny. Niech $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ będzie bijekcją taką, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi $|f(k) - k| \leq 2023$. Wykaż, że ciąg $c_n = \sum_{k=1}^n a_{f(k)}$ jest zbieżny.

10. Oblicz granice

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

11. Niech $p \in \mathbb{N}$. Oblicz granice

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}},$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1} \right),$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=0}^n \frac{(p+k)!}{k!}.$$

12. Wykaż, że jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$, $b_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = +\infty,$$

to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = g.$$

13. Dany jest ciąg liczb rzeczywistych $(x_n)_n$ taki, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{2n} + x_{2n+1}) = 2022, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{2n-1} + x_{2n}) = 117.$$

Wykaż, że ciąg $\left(\frac{x_{2n}}{x_{2n+1}} \right)_n$ jest zbieżny i znajdź jego granicę.

14. Dany jest ciąg liczb rzeczywistych $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ taki, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \sum_{k=1}^n a_k^2 = 1.$$

Wykaż, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \sqrt[3]{3n} = 1.$$

Granica ciągu – powtórzenie.

1. Oblicz granice ciągów

- (a) $\frac{3n^4 - 10n^3 - 2n^2 + 7}{9n^4 - 5n^2 + 19n}$ (k) $\left(\frac{3n^2}{3n^2 - 1}\right)^n$,
 (b) $\frac{5^{n+1} \cdot n^2 - 3^{n+2} \cdot n^3}{3n \cdot 5^{n+2} + 2^{n+3} \cdot n^6}$ (l) $\left(\frac{3n^2}{3n^2 - 1}\right)^{n^3}$,
 (c) $\frac{2\sqrt{n} - 3\sqrt[3]{n+1}}{3\sqrt{n+1} - 2\sqrt[3]{n}}$, (m) $\sqrt[n]{\binom{3n}{n}}$,
 (d) $n^3 \left(\sqrt{n^2 + \sqrt{n^4 + 1}} - n\sqrt{2}\right)$, (n) $^{n+1}\sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$,
 (e) $\sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + 4} - \sqrt[3]{n^3 + 1}$, (o) $\sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n^2+1}}$,
 (f) $\sqrt[3]{7n} - 3 \cdot 5^n - 12$, (p) $\frac{1}{n!} \binom{2n}{n}$,
 (g) $\frac{n!}{2^{n^2}}$, (q) $\frac{\left(^{n+1}\sqrt{(n+1)!}\right)^n}{n!}$,
 (h) $\binom{2n}{n}^{-1}$
 (i) $\frac{2^n n!}{n^n}$,
 (j) $\left(\frac{n(n+1)}{(n+2)^2}\right)^{3n-2}$,

2. Zbadaj zbieżność ciągów zadanych przez warunki

- (a) $a_0 = 3, a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 4}$,
 (b) $b_0 = 2, b_{n+1} = \frac{2b_n}{1 + b_n}$,
 (c) $c_0 = 5, c_{n+1} = \frac{(c_n - 2)^2}{5}$.

Jeżeli ciąg jest zbieżny, wyznacz jego granicę.

3. Dany jest ciąg $(a_n)_n$ taki, że $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = a$. Udowodnij, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = a.$$

4. Dany jest ciąg $(a_n)_{n=1}^\infty$ liczb dodatnich taki, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = +\infty$. Udowodnij, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n (1 + a_k) = +\infty.$$

5. Ciąg liczb dodatnich $(a_n)_{n=1}^\infty$ spełnia warunek

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}) = 1.$$

Wykaż, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

6. Zbadaj zbieżność ciągów

- (a) $\sum_{k=1}^n \frac{k}{\sqrt{k+1}}$, (e) $\sum_{k=1}^n (-1)^k \left(\sqrt[3]{2k+1} - \sqrt[3]{2k}\right)$
 (b) $\sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k}$, (f) $\sum_{k=1}^n \left(\sqrt[3]{2k+1} - \sqrt[3]{2k}\right)^3$
 (c) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt[3]{(k+1)^2}}$, (g) $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{3^k}\right)$,
 (d) $\sum_{k=1}^n \left(\sqrt[3]{2k+1} - \sqrt[3]{2k}\right)$ (h) $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{(-1)^k}{2^k}\right).$

7. Wyznacz kresy zbiorów

- (a) $\left\{ \frac{\sqrt{m+1} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{m} + \sqrt{n}} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$,
 (b) $\left\{ \frac{nm}{2n^2 + 3m^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$,
 (c) $\left\{ \min \left(x, \frac{1}{y}, y + \frac{1}{x} \right) : x, y > 0 \right\}$,
 (d) $\left\{ \frac{1-x}{1+x} + \frac{1-y}{1+y} + \frac{1-z}{1+z} : x, y, z > 0 \text{ i } x + y + z = 1 \right\}$,
 (e) $\{ \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor : n \in \mathbb{N} \}$.

8. Oblicz granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \dots + \sqrt[n]{e^n}}{n}$.9. Wszystkie wyrazy ciągu $(a_n)_n$ są dodatnie i ciąg $(b_n)_n$ zadany wzorem

$$b_n = a_n \cdot \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k}$$

jest zbieżny. Udowodnij, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Funkcja wykładnicza – wprowadzenie

Przypomnienie: Jeśli $a > 0$ i $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, gdzie $p, q \in \mathbb{N}$, to

$$a^x = (\sqrt[q]{a})^p \quad \text{oraz} \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

Lemat o ciągach szybko zbieżnych do 0. Jeżeli $(a_n)_n$ jest ciągiem liczb rzeczywistych takim, że $na_n \rightarrow 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^n = 1$.

Tw. 1. (istnienie i własności funkcji wykładniczej). Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ ciąg

$$a_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

jest zbieżny do granicy $g(x) \in \mathbb{R}$, którą zapisujemy $\exp x$.

Funkcję $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *funkcją wykładniczą* lub *eksponentą*. Ma ona następujące własności:

- (i) $\exp(x) > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ oraz $\exp(x) \geq 1$ dla $x \geq 0$ i $\exp(x) \leq 1$ dla $x \leq 0$;
- (ii) $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$;
- (iii) jeżeli $x \in \mathbb{Q}$, to $\exp x = e^x$;
- (iv) $\exp x \geq 1 + x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ i $\exp x \leq \frac{1}{1 - x}$ dla $x < 1$;
- (v) funkcja $\exp$ jest ściśle rosnąca; jeśli $x_n \rightarrow +\infty$ to $\exp x_n \rightarrow +\infty$ i $\exp(-x_n) \rightarrow 0$.

Ze względu na punkty (ii) i (iii) ma sens zapis $e^x = \exp x$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$.

Tw. 2. Obrazem funkcji $\exp$ jest cała półprosta $(0, +\infty)$. Zatem $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ jest bijekcją.

1. Wykaż, że jeśli $(x_n)_n$ jest ciągiem liczb rzeczywistych takim, że $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in \mathbb{R}$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp x_n = \exp x$.
2. Niech $x \in \mathbb{R}$ i $(t_n)_n$ jest ciągiem liczb rzeczywistych różnych od zera i zbieżnym do zera. Wykaż, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\exp(x + t_n) - \exp x}{t_n} = \exp x$.
3. Udowodnij, że $\exp x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.
4. Wykaż, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $|e^x - 1 - x| \leq |x|^2 \cdot e^{|x|}$.
5. Niech $q \in (0, 1)$, $x, y \in \mathbb{R}$ i $x \neq y$. Udowodnij nierówność

$$(1 - q) \exp x + q \exp y > \exp((1 - q)x + qy).$$