# GAL (Informatyka)

Wykład - zagadnienie własne

Wersja z dnia 6 lutego 2014

*Paweł Bechler*

# 1 Podobieństwo macierzy

**Definicja 1.** Powiemy, że macierze $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ są *podobne*, jeżeli istnieje macierz nieosobliwa $C \in \mathbb{K}^{n,n}$ taka, że

$$B = C^{-1}AC.$$

*Uwaga* 1. Podobieństwo macierzy jest relacją równoważności w zbiorze $\mathbb{K}^{n,n}$, a więc relacja ta wyznacza podział $\mathbb{K}^{n,n}$ na klasy abstrakcji (rozłączne podzbiory) macierzy wzajemnie podobnych.

*Uwaga* 2. Macierz $C$ powyżej można traktować jako macierz zmiany bazy w przestrzeni $\mathbb{K}^n$, więc macierze $A$ i $B$ są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy są macierzami pewnego przekształcenie liniowego $F \in L(\mathbb{K}^n)$ w różnych bazach (przy czym rozumiemy, że w dziedzinie i przeciwdziedzinie $F$ mamy jedną bazę)

**Stwierdzenie 1** (Niezmienniki podobieństwa)**.** *Jeżeli macierze $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ są podobne, to*

*(i)* $\det A = \det B$,

*(ii)* $\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}B$,

*(iii)* $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}B$.

*Dowód.* Teza (i) jest wnioskiem z tw. Cauchy'ego o wyznaczniku iloczynu macierzy, (ii) i (iii) zostawiamy jako ćwiczenie. □

# 2 Wartości, wektory i podprzestrzenie własne

**Definicja 2.** Niech $A \in \mathbb{K}^{n,n}$.

(i) Powiemy, że liczba $\lambda \in \mathbb{K}$ jest *wartością własną* macierzy $A$, jeżeli istnieje wektor $\vec{v} \in \mathbb{K}^n$, $\vec{v} \neq 0$, taki, że

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

(ii) Taki wektor $\vec{v}$ nazywamy *wektorem własnym* odpowiadającym wartości własnej $\lambda$.

(iii) Jeżeli $\lambda$ jest wartością własną macierzy $A$, to zbiór

$$V_\lambda = \{\vec{v} \in \mathbb{K}^n : A\vec{v} = \lambda\vec{v}\}$$

nazywamy *podprzestrzenią własną* odpowiadającą wartości własnej $\lambda$.

*Uwaga* 3. Jak łatwo zauważyć, $V_\lambda = \ker(A - \lambda I_n)$ , więc $V_\lambda$ jest podprzestrzenią liniową w $\mathbb{K}^n$, a jej elementy to wszystkie wektory własne macierzy $A$ odpowiadające wartości własnej $\lambda$ oraz wektor zerowy.

**Definicja 3.** *Widmem* macierzy $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ nazywamy zbiór jej wszystkich wartości własnych. Zbiór ten oznaczamy symbolem $\sigma(A)$.

**Przykład 1.** Niech $A = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$. Można policzyć, że

$$A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Zatem $A$ ma wartości własne $-1$, $3$, a odpowiadające im wektory własne to $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

**Przykład 2.** Jeżeli $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ jest macierzą diagonalną,

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix},$$

to liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są wartościami własnymi macierzy $A$, a odpowiadające im wektory własne to $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$.

**Przykład 3.** Jeżeli $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, $\vec{x} \neq 0$ i $\vec{x} \in \ker A$, to $\vec{x}$ jest wektorem własnym dla wartości własnej 0. Jeżeli macierz $A$ jest osobliwa, to $\ker A$ jest podprzestrzenią własną odpowiadającą wartości własnej 0.

**Definicja 4.** Niech $A \in \mathbb{K}^{n,n}$. *Wielomian charakterystyczny* macierzy $A$ jest zdefiniowany jako

$$p_A(\lambda) = \det_n(A - \lambda I_n).$$

Można pokazać, że $p_A \in \mathbb{K}[\lambda]_n$.

**Przykład 4.** Jeżeli $A = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$, to

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} -5 - \lambda & -4 \\ 8 & 7 - \lambda \end{bmatrix} = (-5 - \lambda)(7 - \lambda) + 32 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda + 1)(\lambda - 3). \end{aligned}$$

**Stwierdzenie 2.** *Liczba* $\lambda \in \mathbb{K}$ *jest wartością własną macierzy* $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\lambda$ *jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego* $p_A$.

*Dowód.* $\lambda$ jest wartością własną $A$ wtw. gdy $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ dla pewnego niezerowego wektora $\vec{v}$, wtw. gdy $\vec{v} \in \ker(A - \lambda I_n)$, wtw. gdy macierz $A - \lambda I_n$ jest osobliwa, wtw. gdy $\det(A - \lambda I_n) = 0$. □

**Stwierdzenie 3.** *Jeżeli* $\lambda \in \mathbb{K}$ *jest wartością własną macierzy* $A \in \mathbb{K}^{n,n}$, *to wektor* $\vec{v} \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ *jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej* $\lambda$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\vec{v} \in \ker(A - \lambda I_n).$$

*Dowód.* $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ wtw. gdy $(A - \lambda I_n)\vec{v} = 0$ wtw. gdy $\vec{v} \in \ker(A - \lambda I_n)$. □

**Przykład 5.** Macierz $A = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$ z poprzedniego przykładu ma dokładnie dwie wartości własne 1 i -3.

**Przykład 6.** Jeżeli $A = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ (macierz diagonalna), to

$$p_A(\lambda) = (a_1 - \lambda)(a_2 - \lambda) \ldots (a_n - \lambda)$$

oraz $\sigma(A) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

**Stwierdzenie 4.** *Wielomian charakterystyczny macierzy jest niezmiennikiem relacji podobieństwa, tzn. jeżeli macierze* $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ *są podobne, to* $p_A = p_B$.

*Dowód.* $B = C^{-1}AC$ dla pewnej nieosobliwej macierzy $C$. Dla dowolnej liczby $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$C^{-1}(A - \lambda I_n)C = C^{-1}AC - C^{-1}\lambda I_n C = B - \lambda I_n,$$

co oznacza, że macierze $A - \lambda I_n$ i $B - \lambda I_n$ też są podobne, więc ich wyznaczniki są równe, czyli

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \det(B - \lambda I_n) = p_B(\lambda).$$

□

**Stwierdzenie 5.** *Jeżeli* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *są różnymi wartościami własnymi macierzy* $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ *i* $\vec{v}_j$ *oznacza wektor własny odpowiadający wartości własnej* $\lambda_j$, *to wektory* $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ *są liniowo niezależne.*

*Dowód.* Stosujemy indukcję po $k$. Dla $k = 1$ teza jest oczywista. Załóżmy, że teza zachodzi dla $k - 1$ i niech

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{v}_k = 0. \tag{*}$$

Zatem

$$A(\alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{v}_k) = \alpha_1\lambda_1\vec{v}_1 + \alpha_2\lambda_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_k\lambda_k\vec{v}_k = 0$$

Mnożąc (*) stronami przez $\lambda_1$ dostajemy

$$\alpha_1\lambda_1\vec{v}_1 + \alpha_2\lambda_1\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_k\lambda_1\vec{v}_k = 0,$$

więc po odjęciu ostatnich dwóch równości stronami, otrzymujemy

$$\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_1)\vec{v}_k = 0.$$

Wobec założenia indkucyjnego $\alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, więc także $\alpha_1 = 0$ i pokazaliśmy liniową niezależność wektorów $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$. □

# 3 Endomorfizmy

**Definicja 5.** Niech $X$ oznacza przestrzeń liniową. *Endomorfizm* przestrzeni $X$ jest to dowolne przekształcenie liniowe $f \in L(X)$.

Jeżeli w przestrzeni $X$ ustalimy bazę $(x_1, \ldots, x_n)$, to możemy rozważać macierz $A$ przekształcenia liniowego $f \in L(X)$ w tej bazie. Jeżeli $(y_1, \ldots, y_n)$ to inna baza w $X$, $B$ to macierz $f$ w tej bazie, to

$$B = U^{-1}AU,$$

gdzie $U$ to macierz miany bazy z $(y_1, \ldots, y_n)$ na $(x_1, \ldots, x_n)$.

Na odwrót, każda macierz nieosobliwa z $\mathbb{K}^{n,n}$ jest macierzą zmiany bazy, więc każda macierz podobna do $A$ jest macierzą przekształcenia liniowego $f$ w pewnej bazie.

**Definicja 6.** Jak wcześniej pokazaliśmy, wyznacznik i wielomian charakterystyczny są niezmiennnikami relacji podobieństwa macierzy. Wobec powyższych spostrzeżeń, możemy określić wyznacznik i wielomian charakterystyczny endomorfizmu $f \in L(X)$: niech $A$ będzie macierzą $f$ w pewnej bazie. Wtedy

$$\det f = \det A, \qquad p_f(\lambda) = p_A(\lambda).$$

**Definicja 7.** Wartość własną, wektor własny i podprzestrzeń własną endomorfizmu $f \in L(X)$ definiujemy analogicznie jak w dla macierzy:

(i) $\lambda$ jest *wartością własną* $f$, jeżeli istnieje $v \in X \setminus \{0\}$ taki, że $f(v) = \lambda v$;

(ii) każdy taki wektor $v$ nazywamy *wektorem własnym* endomorfizmu $f$, odpowiadającym wartości własnej $\lambda$;

(iii) *podprzestrzeń własną* odpowiadającą wartości wasnej $\lambda$ definiujemy jako

$$V_\lambda = \{v \in X : f(v) = \lambda v\}.$$

Tak samo, jak w przypadku macierzy, prawdziwe jest

**Stwierdzenie 6.** *Jeżeli* $f \in L(X)$*, to*

*(i)* $\lambda$ *jest wartością własną* $f$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $p_f(\lambda) = 0$*;*

*(ii)* $V_\lambda = \ker(f - \lambda \mathrm{id}_X)$*;*

*(iii) wektory własne* $f$ *odpowiadające różnym wartościom własnym* $f$ *są liniowo niezależne.*

**Definicja 8.** Podprzestrzeń $U \subset X$ nazywamy *podprzestrzenią niezmienniczą* endomorfizmu $f \in L(X)$, jeżeli $f(U) \subset U$.

**Przykład 7.** Jeżeli $f \in L(\mathbb{K}[t]_n)$, $f(p) = p'$, to $f$ ma podprzestrzenie niezmiennicze $\mathrm{span}(1, \ldots, t^k)$ dla $k = 0, 1, \ldots, n$.

*Uwaga* 4. Niech $f \in L(X)$:

- Jeżeli $\lambda$ jest wartością własną endomorifzmu $f$, to podprzestrzeń własna $V_\lambda$ jest podprzestrzenią niezmienniczą dla $f$.
- Podprzestrzenie $\mathrm{im} f$ i $\ker f$ są niezmiennicze dla $f$.

**Stwierdzenie 7.** *Jeżeli* $U \subset X$ *jest podprzestrzenią niezmienniczą endomorfizmu* $f \in L(X)$*, to wielomian charakterystyczny endomorfizmu* $f|_U \in L(U)$ *jest dzielnikiem wielomianu charakterystycznego endomorfizmu* $f$*.*

W dowodzie wykorzystamy następujący wniosek z tw. Cauchy'ego:

**Stwierdzenie 8.** *Niech* $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ *będzie macierzą postaci*

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix},$$

*gdzie* $B \in \mathbb{K}^{k,k}$*,* $C \in \mathbb{K}^{k,n-k}$*,* $D \in \mathbb{K}^{n-k,n-k}$*. Wtedy*

$$\det A = \det B \cdot \det D.$$

*Dowód.* Jeżeli macierz $D$ jest osobliwa, to macierz $A$ również i teza jest prawdziwa. W przeciwnym przypadku możemuy napisać:

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_k & CD^{-1} \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}.$$

Wyznaczniki kolejnych macierzy w iloczynie po prawej stronie są równe 1, $\det A$ (rozwijamy rekurencyjnie $n - k$ razy względem ostatniej kolumny), $\det C$ (rozwijamy rekurencyjnie $k$ razy względem pierwszej kolumny). Wystarczy skorzystać z twierdzenia Cauchy'ego. $\square$

*Dowód stw. 7.* Niech $u_1, \ldots, u_k$ to baza podprzestrzeni $U$, $u_{k+1}, \ldots, u_n$ to jej dopełnienie do bazy całej przestrzeni $X$. W tej bazie macierz $f$ ma postać

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

wobec czego

$$\begin{aligned} p_f(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \begin{bmatrix} B - \lambda I_k & C \\ 0 & D - \lambda I_{n-k} \end{bmatrix} \\ = \det(B - \lambda I_k) \cdot \det(D - \lambda I_{n-k}) \\ = p_{f|_U}(\lambda) \cdot \det(D - \lambda I_{n-k}) \end{aligned}$$

□

# 4 Baza i macierz Jordana endomorfizmu

**Definicja 9.** *Klatka Jordana* jest to macierz postaci

$$J_{k,\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & & \\ & \lambda & 1 & & & \\ & & \lambda & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 & \\ & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{bmatrix}.$$

W szczególności $J_{1,\lambda} = [\lambda]$.

*Macierz Jordana* jest to macierz postaci

$$J = \begin{bmatrix} J_{k_1,\lambda_1} & & & \\ & J_{k_2,\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{k_r,\lambda_r} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n,n},$$

gdzie $k_1 + \ldots + k_r = n$.

Powiemy, że baza $w_1, \cdots w_n$ przestrzeni $X$ jest *bazą Jordana* dla endomorfizmu $f \in L(X)$, jeżeli macierz $f$ w tej bazie jest macierzą Jordana.

Załóżmy, że endomorfizm $f \in L(X)$ ma w bazie $w_1, \ldots, w_n$ macierz Jordana $J$. Niech $l_1 = 0$, $l_2 = k_1$, $l_3 = k_1 + k_2$, $\ldots$ $l_r = k_1 + \ldots + k_{r-1}$, $l_{r+1} = k_1 + \ldots + k_r = n$. Wówczas:

1. $\mathrm{span}(w_{l_s+1}, \ldots, w_{l_s+k_s})$ to podprzestrzeń niezmiennicza $f$, odpowiadająca blokowi $J_{\lambda_s,k_s}$ macierzy $J$.

2. $w_{l_s+1}$ to wektor własny odpowiadający wartości własnej $\lambda_s$, w szczególności $w_{l_s+1} \in \mathrm{im} f$.

3. Jeżeli $\lambda_s = 0$, to $w_{l_s+1} \in \ker f$. Ponadto $\ker f = \operatorname{span}\{w_{l_s+1} : \lambda_s = 0\}$.

4. $f(w_{l_s+j}) = w_{l_s+j-1} + \lambda_s w_{l_s+j}$ dla $j = 2, 3, \ldots, k_s$ (wynika to z postaci klatki Jordana $J_{\lambda_s,k_s}$).

5. Podprzestrzeń $\operatorname{im} f$ jest rozpięta przez kombinacje liniowe wektorów $w_j$, a współczynniki każdej takiej kombinacji to wyrazy pewnej niezerowej kolumny macierzy $J$. Dla $\lambda_s = 0$ wektory $w_{l_s+k_s}$ (czyli ostatnie elementy ciągu wektorów bazowych $(w_{l_s+1}, \ldots w_{l_s+k_s})$ odpowiadającego klatce Jordana $J_{\lambda_s,k_s}$) jako jedyne nie występują w tych kombinacjach liniowych. Jest ich $n - \dim \operatorname{im} f = \dim \ker f$ i są one liniowo niezależne, więc

$$X = \operatorname{im} f \oplus \operatorname{span}\{w_{l_s+k_s} : \lambda_s = 0\}$$

.

**Twierdzenie 9** (Twierdzenie Jordana). *Jeżeli wielomian charakterystyczny endomorfizmu $f \in L(X)$ jest iloczynem czynników liniowych, to w $X$ istnieje baza Jordana dla endomorfizmu $f$ i macierz $f$ w tej bazie jest macierzą Jordana.*

*Dowód.* Stosujemy indukcję po $n = \dim X$. Jeżeli $n = 1$ to twierdzenie jest oczywiste, gdyż każda macierz $1 \times 1$ jest macierzą Jordana.

Załóżmy, że twierdzenie zachodzi dla dowolnej przestrzeni wymiaru mniejszego niż $n$.

**I.** Rozważmy sytuację, gdy $\dim \operatorname{im} f < n$. Niech

$$g = f|_{\operatorname{im} f} \in L(\operatorname{im} f).$$

Wielomian charakterystyczny $p_g$ jest dzielnikiem wielomianu $p_f$, na mocy stwierdzenia 7. Wobec tego $p_g$ jest iloczynem czynników liniowych i możemy stosować założenie indukcyjne do endomorfizmu $g$.

W podprzestrzeni $\operatorname{im} f$ istnieje baza Jordana dla $g$: $w_1, \ldots, w_m$, $m = \dim \operatorname{im} f$.

Jeżeli $\operatorname{im} f \oplus \ker f = X$, to bazę $w_1, \ldots w_m$ rozszerzamy o dowolną bazę $\ker f$, otrzymując bazę Jordana dla $f$.

W przeciwnym przypadku $\operatorname{im} f \cap \ker f \neq \{0\}$. Mamy też

$$\ker g = \ker f \cap \operatorname{im} f.$$

Niech $t = \dim \ker g$. Możemy przyjąć, że pierwsze $t$ klatek Jordana dla $g$ odpowiada wartości własnej 0, czyli $\lambda_1 = \ldots = \lambda_t = 0$. Wtedy

$$\ker g = \operatorname{span}(w_{l_1+1}, \ldots, w_{l_t+1}).$$

Ponadto, $w_{l_1+k_1}, \ldots, w_{l_t+k_t} \in \operatorname{im} f$, więc istnieją wektory $v_1, \ldots, v_t \in X$ takie, że

$$f(v_1) = w_{l_1+k_1}, \ldots, f(v_t) = w_{l_t+k_t}.$$

Układ $w_{l_1+1}, \ldots, w_{l_t+1}$ (bazę $\ker g$) uzupełniamy wektorami $u_1, \ldots, u_{n-m-t}$ do bazy $\ker f$.

Pokażemy, że układ wektorów

$$w_1, \ldots, w_m, v_1, \ldots, v_t, u_1, \ldots, u_{n-m-t} \tag{\#}$$

jest liniowo niezależny, czyli jest bazą $X$. Załóżmy, że

$$\alpha_1 w_1 + \ldots \alpha_m w_m + \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_m v_t + \gamma_1 u_1 + \ldots + \gamma_{n-m-t} u_{n-m-t} = 0.$$

Na obie strony tej równości działamy endomorfizmem $f$, pamiętając, że $f|_{\mathrm{im} f} = g$, $f(v_s) = w_{l_s+k_s}$, $f(u_i) = 0$. Dostajemy

$$\alpha_1 g(w_1) + \ldots + \alpha_m g(w_m) = -\beta_1 w_{l_1+k_1} - \ldots - \beta_t w_{l_t+k_t}.$$

Lewa strona tej równości to wektor z im$g$, co, wobec spostrzeżenia 5. powyżej, oznacza, że jest ona równa 0. Zatem $\beta_1 = \ldots = \beta_s = 0$. Mamy więc

$$\alpha_1 w_1 + \ldots \alpha_m w_m + \gamma_1 u_1 + \ldots + \gamma_{n-m-t} u_{n-m-t} = 0,$$

więc $u = \gamma_1 u_1 + \ldots + \gamma_{n-m-t} u_{n-m-t} \in \mathrm{im} f \cap \ker f$. Wobec wyboru wektorów $u_i$ jako uzupełnienia bazy $\mathrm{im} f \cap \ker f$ do bazy $\ker f$ oznacza to, że $u = 0$, więc $\gamma_1 = \ldots = \gamma_{n-m-t} = 0$. Teraz z liniowej niezależności $w_1, \ldots, w_m$ dostajemy $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$.

Układ (#) ustawiamy w następującej kolejności:

$$u_1, \ldots, u_{n-m-t}, \quad w_{l_1+1}, \ldots, w_{l_1+k_1}, v_1, \quad w_{l_2+1}, \ldots w_{l_2+k_2}, v_2, \quad \ldots,$$
$$w_{l_t+1}, \ldots, w_{l_t+k_t}, v_t, \quad w_{l_{t+1}+1}, \ldots, w_m.$$

Wobec sposobu określenia wektorów $v_s$ i $u_j$, jest to baza Jordana dla endomorfizmu $f$.

**II.** Jeżeli $\dim \mathrm{im} f = n$ postępujemy następująco: niech $\lambda$ będzie dowoloną wartością własną $f$ (jest $\lambda \neq 0$) i niech $F = f - \lambda \mathrm{id}_X$. Do $F$ stosujemy część **I** dowodu. Otrzymana baza Jordana dla $F$ jest też bazą Jordana dla $f = F + \lambda \mathrm{id}_X$. Macierz Jordana dla $f$ otrzymujemy z macierzy Jordana dla $F$ dodając do niej $\lambda I_n$.

□

**Wniosek 10.** *Jeżeli $X$ jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{C}$ i $f \in L(X)$, to dla $f$ istnieje baza Jordana.*

**Wniosek 11.** *Jeżeli $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ i wielomian charakterystyczny $p_A(\lambda)$ jest iloczynem czynników liniowych, to macierz $A$ jest podobna do pewnej macierzy Jordana.*

*Dowód.* Należy wyznaczyć bazę Jordana $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ i odpowiadającą jej macierz Jordana $J$ dla endomorfizmu $f \in L(\mathbb{K}^n)$ danego wzorem $f(\vec{x}) = A\vec{x}$. Wtedy, dla $U = [\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n]$

$$A = U^{-1} J U.$$

□